Friesz, T.L., Luque, J., Tobin, R.L., Wie, B-W.:
Dynamic network traffic assignment
considered as a continuous time optimal control problem,
Operations Research, Vol. 37(6), pp. 893-901, 1989.

Nonlinear Pricing and Revenue Optimization
Freight Systems and Logistics
Dynamic Network Games and Dynamic Traffic Assignment
Network Design and MPECs

2014/6/27(金)
集中理論談話会 #4
D2 浦田　淳司

論文目次

研究概要：
・動的交通配分の定式化
・Pontryaginの最大値原理の導入
・システム最適，ワードロップ均衡(利用者最適)のそれぞれで定式化

＋Dynamic Control Problem (Pntryagin's maximum principle)のエッセンス

1. Notation, Dynamics and Constraints
2. System Optimization
3. User Optimization
4. Conclusions

動学的問題への3つのアプローチ

著：A.C. チャン（訳：小田正雄, 仙波憲一, 高森寛, 平澤憲男）
動学的最適化の基礎, シーエーピー出版, 2006

1. 動的計画法（Bellman, R.E.(1953)）
- 多段階意思決定モデル / 再帰的計算過程

$$V(s_t) = \max_{j_t}\left\{u_j(s_t) + \beta \int V(s_{t+1})p(ds_{t+1}|s_t, j_t)\right\}$$

2. 変分法（Newton, I(1687)）
- 最適関数の決定問題(最速降下曲線など)

$$\max V(y) = \int_0^T F(t, y(t), y'(t))dt$$

$$subject\ to\ \ y(0) = A,\ \ y(T) = Z$$

3. 最適制御理論（Pontryagin, L.S. et al.(1962)）
- 変分法の進化
- 時間変数t, 状態変数y(t)に加えて, 制御変数u(t)を追加

最適制御理論(Dynamic Control Problem)

状態変数　$y(t) = \{y_1, \dots, y_i \dots, y_n\}(t)$　連続（区分的に微分可能，鋭点あり）
制御変数　$u(t) = \{u_1, \dots, u_i \dots, u_n\}(t)$　非連続可（区分的に連続）

目的関数　$\max V = \max_u \int_0^T F(t, y, u) dt$

制約条件

運動方程式　$\frac{dy_i}{dt} = f^i\big(t, y(t), u(t)\big)$　(yは初期条件と運動方程式で決定)

初期条件　$y(0) = \{y_1, \dots, y_i \dots, y_n\}(0)$

終端条件　$y(T)$　自由　（制約を設定することも可能）

制御集合　$u(t) \in U$

等価

最大値原理（ハミルトニアンHの最大化）

$H \equiv F(t, y, u) + \sum_j^n \lambda_j f^j(t, y, u)$

$\max_u H(t, y, u, \lambda) \quad \forall t$

yについての運動方程式　$\frac{dy_i}{dt} = \frac{dH}{d\lambda}$

λについての運動方程式　$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{dH}{dy}$

横断性条件　$\lambda(t) = 0$

- 制御変数の最適な時間経路が決定
- 時間積分を各時間帯ごとの最適化計算に分解
- 制御変数は非連続でも可

(制約条件)交通量変化率

研究概要：
- 動的交通配分の定式化
- Pontryaginの最大値原理の導入
- システム最適，ワードロップ均衡(利用者最適)のそれぞれで定式化

$G(N,A)$:ノードN，リンクAで形成されるネットワーク
ノードNのうちnを終着点ノード，M={1,2,…,n-1}は発ノード.
t： 時刻 $t \in [0,T]$
$x_a(t)$:時刻tでのリンクa上の交通量＝状態変数
$C_a[x_a(t)]$:交通量$x_a(t)$のときの旅行時間コスト
$u_a(t)$:リンクaへの流入交通量＝制御変数
$g_a[x_a(t)]$:リンクaからの流出交通量

交通量変化率（制約条件）

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = u_a(t) - g_a[x_a(t)] \quad \forall a, \forall t \qquad (1)$$

運動方程式:制御変数uを決めると，状態変数xが決まる

(制約条件)交通量保存則，基本条件

$S_k(t)$: 時刻tでのノードkからの発生交通量
$A(k)$: ノードkが着点となるリンク集合
$B(k)$: ノードkが発点となるリンク集合

交通量保存則（制約条件） $$S_k(t) = \sum_{a \in A(k)} u_a(t) - \sum_{a \in B(k)} g_a[x_a(t)] \quad \forall k \in M, \forall t \qquad (2)$$

基本条件（制約条件）

$$x_a(0) = x_a^0 \quad \forall a \qquad (3)$$

$$u_a(t) \geq 0 \quad \forall a, \forall t \qquad (4)$$

$$x_a(t) \geq 0 \quad \forall a, \forall t \qquad (5)$$

定義 $$\Omega \equiv \left\{(x,u) : (1),(2),(3),(4) \;\; are \;\; satisfied\right\} \qquad (6)$$

Definition 1

動的交通配分が成立するには次の条件を満足すればよい.

1. SOにおいて，その瞬間のコスト関数 $C_a[x_a(t)]$は 非負，単調増加，微分可能，凸である. これをすべてのa, tで成立し，$x_a(t) \geq 0$を満たす.
2. UEにおいて，その瞬間のコスト関数$c_a[x_a(t)]$は正，単調増加，微分可能，であり，合成関数$m_a[x_a(t)] = c_a[x_a(t)]g'_a[x_a(t)]$で表せる. これをすべてのa, tで成立し，$x_a(t) \geq 0$を満たす.
3. 流出関数$g_a[x_a(t)]$は非負，微分可能，単調増加，凹である. これをすべてのa, tで成立し，$x_a(t) \geq 0$を満たす.
4. 初期条件$g_a(0) = 0$がすべてのa,tで成立する.
5. 初期条件$x_a(0) \geq 0$がすべてのaで成立する.

$c_a[x_a(t)]$: 時刻tでの交通量xのリンクaでの旅行時間(1台あたり)

定義　$C_a(x_a) \equiv c_a(x_a)g_a(x_a) \ \forall a$

ハミルトニアン(2. System Optimization)

システム最適の目的関数 $$minimize\ J_1 = \sum_{a \in A} \int_0^T C_a(x_a)dt \qquad (7)$$
$$subject\ to\ (x,u) \in \Omega$$

（全期間全リンクの旅行時間の合計の最小化）

ハミルトニアンの定義 $$H(x,u,\tau,t) = \sum_{a \in A} C_a(x_a) + \sum_{a \in A} \tau_a[u_a - g_a(x_a)] \qquad (8)$$

τ_a: 随伴変数(状態方程式に対するラグランジュ乗数)

- (8)式が解を持つには，Arrow-Kurzの十分定理より，Hが凸であることが必要
- Hが凸であるためには，$\tau_a \geq 0\ (\forall a)$であることが求められる.

ラグラジアン・KKT条件

制御変数の制約条件(2)(4)を考慮して，Hの最小化問題に対し，ラグラジアンを設定

$$L = H + \sum_{k \in M} \mu_k \left[S_k - \sum_{a \in A(k)} u_a + \sum_{a \in B(k)} g_a(x_a) \right] + \sum_{a \in A} \beta_a [-u_a] \qquad (11)$$

μ_k, β_a: ラグランジュ乗数

Lの最小化問題

↕ 必要十分条件

KKT条件

$$\tau_a - \mu_k - \beta_a = 0 \qquad \forall a \in A(k), \forall k \in M, \forall t \in [0, T] \qquad (12)$$

$$\beta_a \geq 0, u_a \geq 0, \beta_a u_a = 0 \qquad \forall a \in A, \forall t \in [0, T] \qquad (13)$$

$$\mu_k \geq 0, \mu_k \left[S_k - \textstyle\sum_{a \in A(k)} u_a + \sum_{a \in B(k)} g_a(x_a) \right] = 0 \forall k \in M, \forall t \in [0, T] \qquad (14)$$

Eular-Lagrange方程式より

$$-\dot{\tau_a} = \frac{\partial L}{\partial x_a} \forall a \in A, \forall t \in [0, T] \qquad (15)$$

$$-\dot{\tau_a} = C_a' - \tau_a g'_a + \mu_k g'_a \qquad \forall a \in B(k), \forall k \in M, \forall t \in [0, T] \qquad (16)$$

横断性条件 $\qquad \tau_a(T) = 0 \qquad \forall a \in A \qquad (17)$

※ ・はt微分，’はx微分を示す

最適制御問題の必要条件の再定式化

（12）（13）より $\tau_a \geq \mu_k \quad \forall a \in A(k), \forall k \in M, \forall t \in [0, T]$ （18）

（17）より $\tau_a(T) = 0 \quad \forall a \in A(k)$ （19）

（16）より $-\dot{\tau_a} = C_a' - \tau_a g'_a + \mu_k g'_a \quad \forall a \in B(k), \forall k \in M, \forall t \in [0, T]$ （20）

（12）（13）より $u_a(\tau_a - \mu_k) = 0 \quad \forall k, a, t \quad \forall a \in A(k), \forall k \in M, \forall t \in [0, T]$ （21）

(14)と(18)より， $\tau_a \geq 0$ が成立するため，Hは凸であり，解を持つ.

(18)(21)より，制御変数u_aは$(\tau_a - \mu_k) = 0$のときに0でない値をとる.
これを求めたい.

制御変数の算出

$(\tau_a - \mu_k) = 0$が$\forall a, k$で成立することが必要

$$\dot{\tau_a}(t) = \dot{\mu_k}(t) \qquad \ddot{\tau_a}(t) = \ddot{\mu_k}(t) \qquad for\ t \in [t_1, t_2] \subseteq [0, T] \tag{22}$$

(22)を(20)に代入

$$(\tau_a - \mu_l)g'_a - C'_a - \dot{\mu}_k = 0 \tag{23}$$

$$(\dot{\tau}_a - \dot{\mu}_l)g'_a + (\tau_a - \mu_l)g''_a \dot{x}_a - C''_a \dot{x}_a - \ddot{\mu}_k = 0 \tag{24}$$

((23)をｘで微分)

(22)(24)(1)より

$$u_a = \frac{[(\mu_k - \mu_l)g''_a - C''_a]g_a - (\dot{\mu}_k - \dot{\mu}_l)g'_a + \ddot{\mu}_k}{(\mu_k - \mu_l)g''_a - C''_a} \tag{26}$$

(26)式または0で，制御変数は与えられる.

交通量保存則の証明

(7)式が満たされれば(18-21)，交通量保存則が満たされることを示す

交通量保存則（制約条件）
$$S_k(t) = \sum_{a \in A(k)} u_a(t) - \sum_{a \in B(k)} g_a[x_a(t)] \ \forall a, \forall t \quad (2)$$

証明

あるkにおいて，保存則が成立していないと仮定し，背理法で示す

(14)式より $\mu_k = 0$

(18)式より $\tau_a \geq \mu_k = 0 \ \forall a$

case i) $\tau_a = \mu_k = 0$の場合

$\tau_a(t) = 0$より，$\dot{\tau}_a(t) = 0$

式(20)より，$0 = C'_a + \mu_l g'_a \quad \forall t, a = (k, \forall l)$

Def1より，C'_aとg'_aは正なので $\mu_l < 0$．　これは(14)式と矛盾

case ii) $\tau_a > \mu_k = 0$の場合

$$S_k(t) + \sum_{a \in B(k)} g_a[x_a(t)] < \sum_{a \in A(k)} u_a(t) \ \forall k \in M, \forall t$$

$u_a = 0 \ (\forall a = (k, l))$なので，

$$S_k + \sum_{a \in B(k)} g_a[x_a(t)] < 0 \ \forall k \in M, \forall t$$

$S_k, g_a(x_a)$は非負なので矛盾．　以上により，交通量保存則は成立■

経路表現を用いた定式化とその解釈

ここでの疑問は，制御変数と状態変数は，通常のシステム最適の交通流と一致するのか．
ノードkからノードnまでの経路pを考える．

$$p = \{k = v_0, a_1, v_1, \dots, v_{m-1}, a_m, v_m = n\} \tag{31}$$

それぞれの経路で次が成立する．

$$\Phi_p = \sum_{a \in p} (C'_a + \dot{\tau}_a) \Big/ g'_a \tag{32}$$

C'_a / g'_a 静的システム最適における
フローのリンクaにおける限界費用

$\dot{\tau}_a / g'_a$ 動的な
フローのリンクaにおける限界費用

$J_1^*[x(t), t]$を最適軌跡に従ったシステム最適の目的関数とすると，

フロー：単位時間あたり交通量

$$\tau_a = \frac{\partial J_1^*[x(t), t]}{\partial x_a} \quad \forall a, \forall t \tag{33}$$

フロー増分あたりの
経路総コストの増分[cost・t/veh]

$$\Phi_p = \sum_{a \in p} \left(C'_a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_1^*}{\partial x_a} \right) \right) \Big/ g'_a \tag{34}$$

経路pのフロー
の限界費用 ＝ 1台増あたりの
総コストの増分[cost/veh] ／ 1台増あたりの
フローの増分[1/t]

フローの限界費用と解の導出

定理：
$\exists t \in [0,T], u_a > 0\ (\forall a \in p \in P_{kn})$において，
$\Phi_p(t) = inf\{\Phi_r(t) : \forall r \in P_{kn}\}$となり，これはDefinition 1の解となる

証明：
式(20)より

$$\Phi_p = \sum_{a \in p} \left(C'_a + \dot{\tau}_a\right) \Big/ g'_a = \sum_{i=1}^{m} (\tau_{a_i} - \mu_{v_i}) \tag{35}$$

ここで，式(18)より

$$\tau_{a_i} \geq \mu_{v_{i-1}} \quad \forall i \tag{36}$$

(35)(36)より

$$\Phi_p \geq \sum_{i=1}^{m} (\mu_{v_{i-1}} - \mu_{v_i}) = \mu_{v_0} - \mu_{v_m} = \mu_k - \mu_n \tag{37}$$

$u_a > 0$では，式(21)より式(36)は等号が成立する必要があり，
Φ_pは式(37)の下界を解とする．

⇒ここでは，利用される経路の時刻tでの限界費用は，
経路候補の中での最小値であることを意味し，静的システム最適の概念と一致

DUE

同様の証明を目的関数を変えて実施

$$minimize\ \ J_2 = \sum_{a \in A} \int_0^T \int_0^{x_a} C_a(w_a) g'_a(w_a) dw_a dt \tag{38}$$

$$subject\ to\ (x, u) \in \Omega$$

$$H(x, u, \tau, t) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} C_a(w_a) g'_a(w_a) dw_a dt + \sum_{a \in A} \tau_a [u_a - g_a(x_a)] \tag{39}$$

$$L = H + \sum_{k \in M} \mu_k \left[S_k - \sum_{a \in A(k)} u_a + \sum_{a \in B(k)} g_a(x_a) \right] + \sum_{a \in A} \beta_a [-u_a] \tag{41}$$

まとめ

・動的交通配分における連続時間の最適制御問題は
　静的配分における配分の考え方を保存している
・多くの定式化を行ったが，ひとつの定式化を出発点としている
・出発時刻選択，最適課金，，などに拡張可能
・複数目的地の場合はFIFO原則が保たれないという課題
⇒”exit function”は流入交通流率とリンク旅行時間の関係が非考慮 (桑原(2005)，赤松(2007))

所感
・動学配分の問題が解を持つことを示したい
　→最適制御理論による定式化が可能（旅行時間最小化と運動方程式，制約）
　→最適制御問題が解を持つことを示せばよい
・（動的）交通配分も初期値が決まれば解が一意に決まるので，運動方程式ではないのか．．避難の問題で，目安としての最適解が求められる．
・（動的）制御変数と状態変数をどうするか．運動方程式として記述可能か．
　→状態変数は流出台数と流入台数．
　→制御変数は出発時刻，チェイン選択率

ご清聴ありがとうございました.

TR c の式1(Nested Dynamic Discrete Choice)

選択確率(時刻t, Pair Set g)

時間割引率　スケールパラメータ

$$P(d_t \mid S_{g,t};\theta) = P(d_t \mid L, S_{g,t};\theta)P(L, S_{g,t};\theta) = \frac{\exp\left(\left(u(S_{g,t}) + \beta \upsilon(S_{g,t})\right)/\sigma\right)}{R_{L,t}} \frac{\exp(\sigma \ln R_{L,t})}{\sum_{L'} \exp(\sigma \ln R_{L',t})} \quad (1)$$

選択結果 上位ネスト　パラメータ

ログサム $$R_{L,t} = \sum_{g \in L} \exp\left(\left(u(S_{g,t}) + \beta \upsilon(S_{g,t})\right)/\sigma\right) \quad (2)$$

推移確率

将来価値 $$\upsilon(d_t, S_{g,t}) = \sum_{S_{g,t}} \upsilon(S_{g,t+1}) p(S_{g,t+1} \mid d_t, S_{g,t}) \quad (3)$$

価値関数 $$v(d_t, S_{g,t}) = u(d_t, S_{g,t}) + \sigma\varepsilon_t(d_t) + \varepsilon_t(L) + \beta \upsilon(d_t, S_{g,t}) \quad (4)$$

利他差　同調性(集中性)

Network Utility $$S_{g,t}(d_t) = m^{l_{g,t}} \left(\frac{1}{N_g} \sum_{ij \in g} \theta_1 \left| x_{i,t}^{\mathrm{dam}} - x_{j,t}^{\mathrm{dam}} \right| \right) + \delta_g^{\mathrm{intra}} \theta_3 \ln k_{g,t}^{\mathrm{intra}} + \delta_g^{\mathrm{inter}} \theta_4 \ln k_{g,t}^{\mathrm{inter}} \quad (5)$$

t期でintra g内
のリンクが形成 $$S_{g,t}(d_t) = S_{g,t}(d_t = (l_{g,t-1} + 1, k_{g,t-1}^{\mathrm{intra}} + 1, k_{g,t-1}^{\mathrm{inter}})) \quad (6)$$

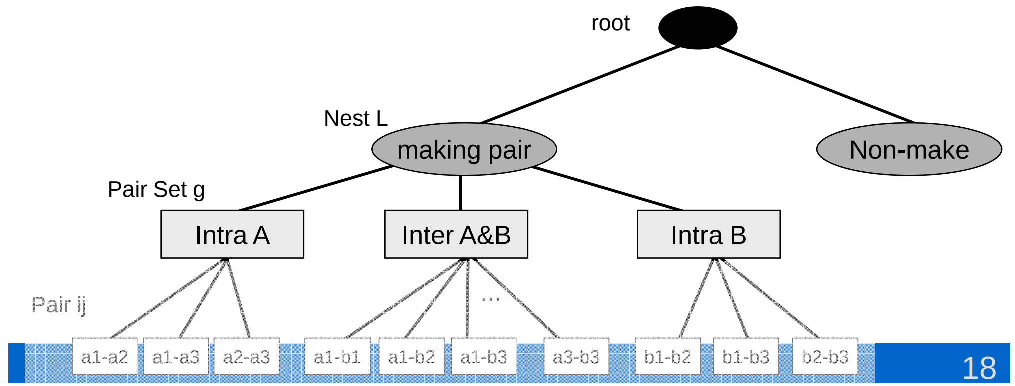
形成コスト

形成あり効用 $$u(d_t, S_{g,t}) = S_{g,t}(d_t) + \frac{1}{N_g} \sum_{ij \in g} \theta_2 x_{ij}^{\mathrm{dis}} \quad (7)$$

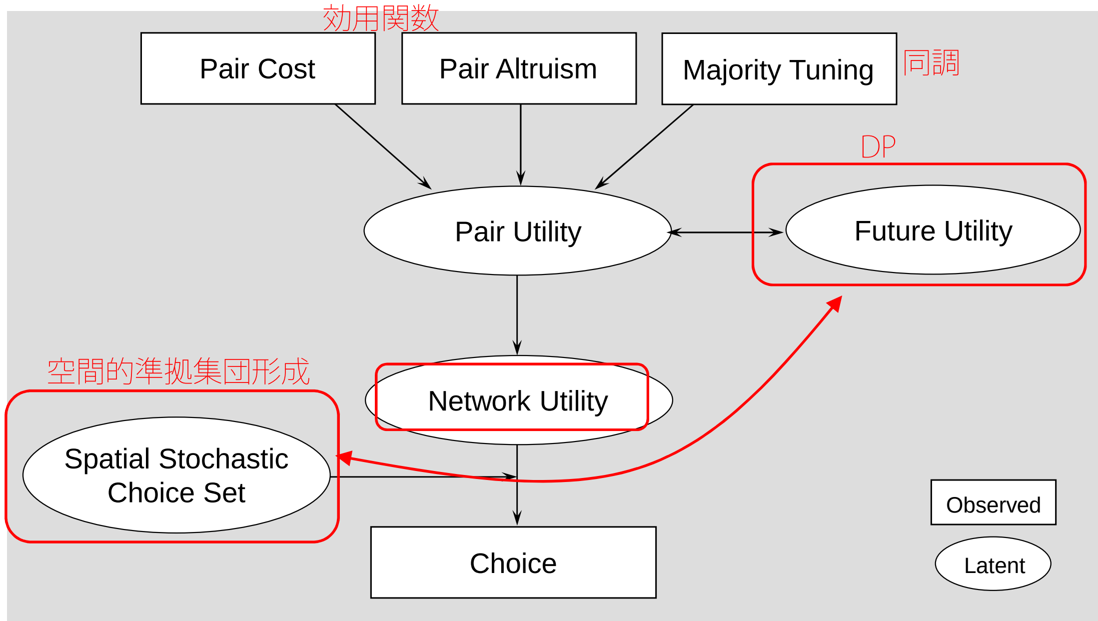
危険度

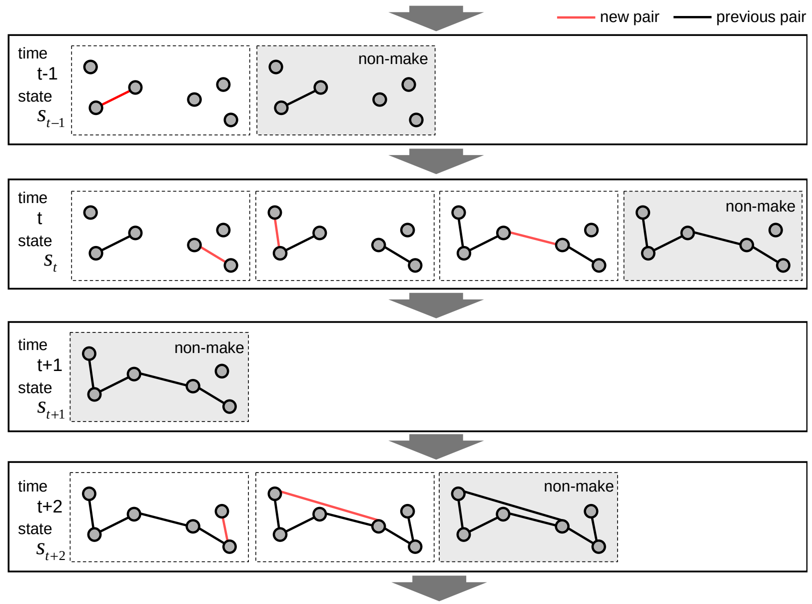
形成なし効用 $$u(d_t, S_{g,t}) = \theta_5 x_t^{\mathrm{rain}} \quad (8)$$

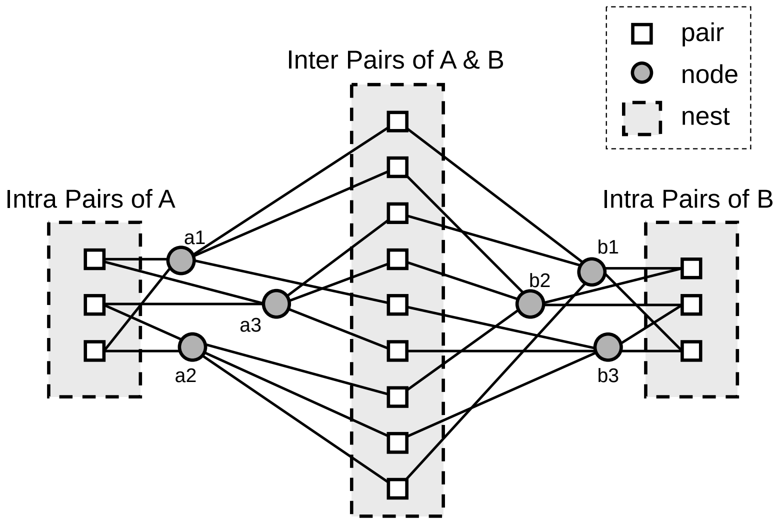
m	形成による利他差の縮小	$k_{g,t}^{\mathrm{intra}}, k_{g,t}^{\mathrm{inter}}$	g内の形成数
$l_{g,t}$	g内の一定時間以内の形成数	x_{ij}^{dis}	ij間距離
N_g	g内のpair数	x_t^{rain}	当該時間帯の雨量
$\delta_g^{\mathrm{intra}}, \delta_g^{\mathrm{inter}}$	gがintraかinterか	$x_{i,t}^{\mathrm{dam}}$	iのダメージ



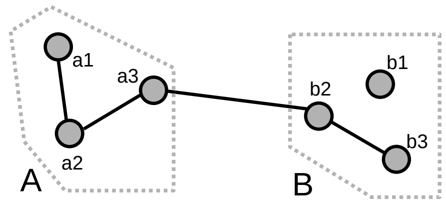
TRc の式







b) Dividing Intra and Inter Pairs by basic groups



a) Dividing Basic Group

TR c の式2 (Tuning Effect)

選択確率（時刻t, Pair Set g）

$$P(d_t \mid S_{g,t};\theta) = P(d_t \mid L, S_{g,t};\theta) P(L, S_{g,t};\theta) = \frac{\exp\left(\left(u(S_{g,t}) + \beta v(S_{g,t})\right)/\sigma\right)}{R_{L,t}} \frac{\exp\left(\sigma \ln R_{L,t}\right)}{\sum_{L'} \exp\left(\sigma \ln R_{L',t}\right)}$$

Network Utility $$S_{g,t}(d_t) = m^{l_{g,t}} \left(\frac{1}{N_g} \sum_{ij \in g} \theta_1 \left| x_{i,t}^{\text{dam}} - x_{j,t}^{\text{dam}} \right| \right) + \delta_g^{\text{intra}} \theta_3 \ln k_{g,t}^{\text{intra}} + \delta_g^{\text{inter}} \theta_4 \ln k_{g,t}^{\text{inter}}$$

$$= O_1 + \theta' \ln k_{g,t}$$

$$\frac{\exp\left(\left(u(S_{g,t}) + \beta v(S_{g,t})\right)/\sigma\right)}{R_{L,t}} = \exp\left(u(S_{g,t})/\sigma\right) \frac{\exp\left(\beta v(S_{g,t})/\sigma\right)}{R_{L,t}}$$

$$= \left[\exp\left(\theta' \ln k_{g,t} + O_1\right)\right]^{1/\sigma} O_2$$

$$= \left[\exp\left(\theta' \ln k_{g,t}\right) \exp\left(O_1\right)\right]^{1/\sigma} O_2$$

$$= \left[\exp\left(\ln\left(k_{g,t}{}^{\theta'}\right)\right)\right]^{1/\sigma} O_3 O_2$$

$$= \left(k_{g,t}{}^{\theta'}\right)^{1/\sigma} O_3 O_2 = \left(k_{g,t}\right)^{\theta'/\sigma} O_3 O_2$$

適応度モデル
ノードv_iのリンク形成確率 $$P(v_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}$$