オークションの人間行動学

ケン・スティグリッツ, 川越敏司・小川一仁・佐々木俊一郎＝訳,
日経BP社, 2008.

2009/07/15

博士課程

原　祐輔

本日の流れ

- オークションとは何か？
- Vickrey (1961)
- Riley and Samuelson (1981)
- Myerson (1981) とMilgrom and Weber (1982)

- オークションとは何か？

イギリス式オークション

オランダ式オークション

Yahoo!オークション(2位価格オークション)

イギリス式オークションとオランダ式オークション

売り手
商品

買い手1

評価値:3000円

買い手2

評価値:5000円

●イギリス式オークションの場合

3500円

3000円

2500円

2000円

●オランダ式オークションの場合

10000円

7000円

5000円

はい，買います！

1位価格オークションと2位価格オークション

売り手
商品

買い手1

評価値:3000円

買い手2

評価値:5000円

●1位価格(封印)オークションの場合

3000円　5000円

買い手2が5000円で落札

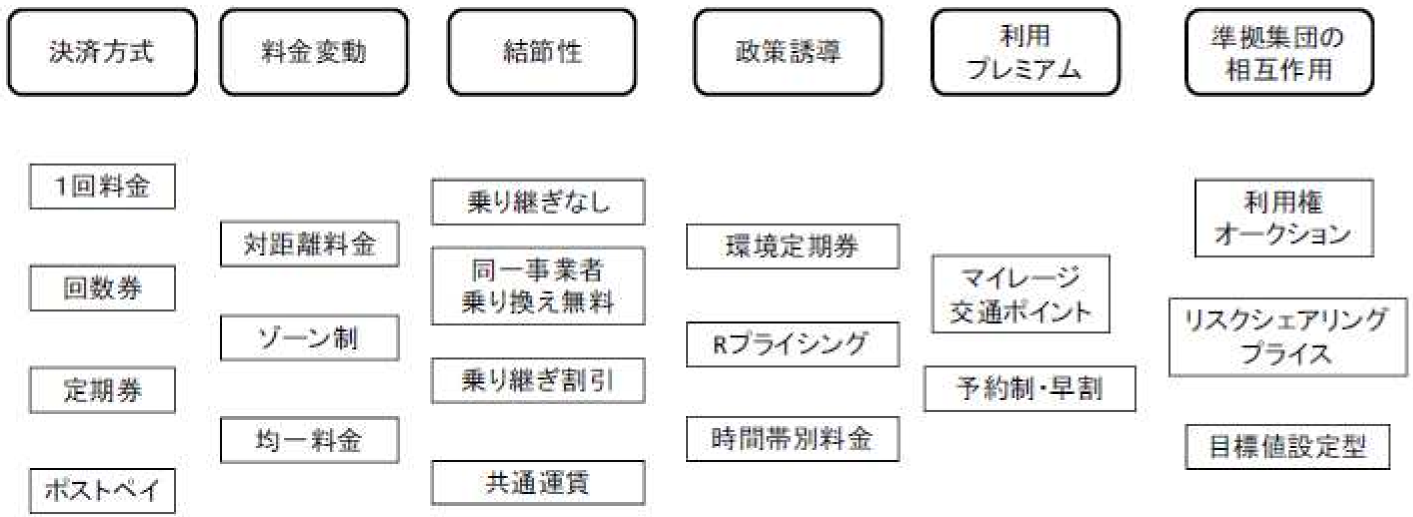
●2位価格(封印)オークションの場合

3000円　5000円

買い手2が3000円で落札

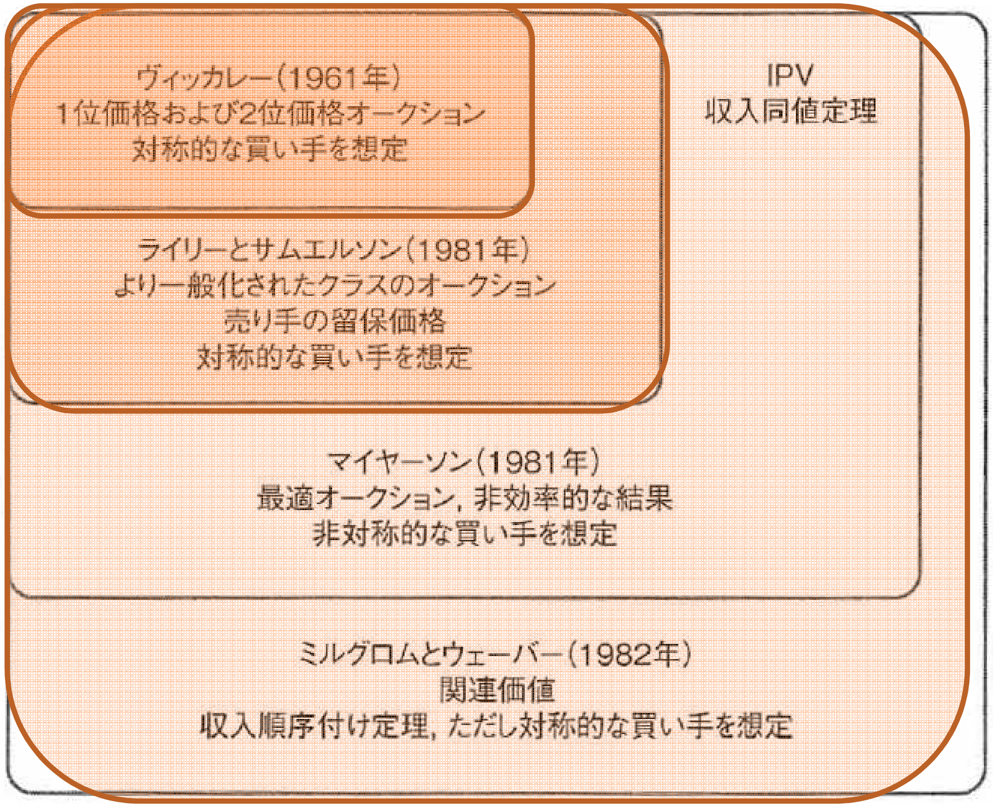
なんでオークション？

- なんかおもしろそうだったから
- ゲーム理論の応用分野としてホットな分野
- **都市的にどんな意味があるの？**
- 都市サービス・交通サービスにおける料金体系を構築する際に，利用者の選好を反映した動的な料金体系として捉えることが可能



公

オークション理論の記念碑的論文である4本



- Vickrey (1961)
- Riley and Samuelson (1981)
- Myerson (1981), Milgrom and Weber (1982)

VICKREY(1961)

- 重要な結果：収入同値定理
- （ある仮定の下では）1位価格オークションと２位価格オークションは売り手にとって全く等価な結果をもたらす

- これから共通の仮定
- 買い手は２人でそれぞれの評価値は[0,1]に一様に分布しており，独立である
- まず，1位価格オークションを考える
- 1位価格オークションでは買い手は正直に自分の評価値では入札しない．なぜなら落札したときの余剰がゼロになるから
- そこで，正しい戦略はビッドシェイディングすること
- どんだけビッドシェイディングして，売り手の期待収入はどんだけになるのか？が１つ目の問題

1位価格オークションの期待支払い額

- 評価値v_1である買い手1は競争相手である評価値v_2の買い手2が均衡戦略を用いて，$v_2/2$を入札することを仮定する．
- ここで，自身の入札額をbとするとき，自分が落札できるときの余剰の期待値を計算する．
- この期待値は（評価値を一様分布と仮定しているので）評価値v_2に関して，$v_2 \leqq 2b$の範囲で，
- 自身が得る余剰$(v_1 - b)$に一様な重みをつけて積分すれば得られる．つまり，以下の式．

$$\int_0^{2b} (v_1 - b) dv_2 = 2b(v_1 - b)$$

- 自身の期待余剰を最大化する入札額bを求めるためにはbで微分して0とすればよいので，

$$2v_1 - 4b = 0 \text{ より } b = v_1/2$$

1位価格オークションの期待収入

- よって買い手2の入札が$v_2/2$のとき，買い手１の入札も$v_1/2$となり，これはSBNEである．
- SBNEとは「対称的なベイジアンナッシュ均衡」であり，「対称的」は「すべての買い手が同じ戦略を用いること」，「ベイジアン」は「期待値を用いること」を表している．
- ここで，買い手1は自分が落札できるとき，すなわち$v_1 > v_2$のときには自分の入札額$v_1/2$を支払う．
- すなわち，買い手1の支払額はv_1が与えられたもとでv_1以下になるような範囲でv_2について平均を取ったものになる．
- つまり，
$$\int_0^{v_1} (v_1/2)dv_2 = v_1^2/2$$
- となる．これをv_1の全ての値について平均を取ると，買い手1の期待支払額は
$$\int_0^1 (v_1^2/2)dv_1 = 1/6$$
- 売り手が受け取る期待収入はこれを2倍したものなので，1位価格オークションにおける売り手の期待収入は1/3となる．

計算のための数学的準備(1)

- 実際のオークションではほとんどいつも最も高い入札額を示した買い手が落札し，その支払額は最も高い額か二番目の額である．
- それゆえ，こうした値をとる分布があらゆるオークション理論において決定的な役割を演じることになる
- たとえば，pdfがf(x)という分布から独立で同一(iid)のn個の標本の中から最も高い値，および2番目に高い値を表す分布のpdfとcdfを求めたい．実際には任意のkに対してk番目に高い値を表す分布を導出した方が便利であるので，一般的にやる．
- まず，xを固定した上で，分布から取られた値がxとx+dxとの間にある確率を考える．
- これはf(x)dxであり，独立に取られた別の値がx以上である確率は(1-F(x))であり，x以下である確率はF(x)である．
- したがって，ある値xがk番目に高い確率は，ある特定のk-1個の値がそれ以上である確率なので，
- $f(x)dx(1-F(x))^{k-1}F(x)^{n-k}$ である．

計算のための数学的準備(2)

- ある特定のxの値がk番目に高い値となる別の多くの可能性を考慮すると，取り出されたn個の値のどれかがk番目に高い値となる可能性は全部でn通りあり，残りのn-1個の値のうち，k-1個がx以上である可能性は $\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right)$ 通りである.

- これらを合わせると，k番目に高い値がxとdxの間にある確率は

$$n\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) f(x)dx(1-F(x))^{k-1}F(x)^{n-k}$$

- よって，k番目に高い値のpdfを$g_k(x)$として表すと

$$g_k(x) = n\left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) f(x)(1-F(x))^{k-1}F(x)^{n-k} = \boxed{\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x)(1-F(x))^{k-1}F(x)^{n-k}}$$

- と一般的に書ける！

計算のための数学的準備(3)

- よって，求めたいものは最高値のpdfと2位価格のpdfなので，k=1とすると，

$$g_1(x) = nf(x)F(x)^{n-1}$$

- k=2とすると

$$g_2(x) = nf(x)(1-F(x))F(x)^{n-2}$$

- これらを積分すると，最高値のcdfは

$$G_1(x) = F(x)^n$$

- 2位価格のcdfは

$$G_2(x) = nF(x)^{n-1} - (n-1)F(x)^n$$

2位価格オークションの期待収入

- 求めたいものに帰ってまいりました
- 2人，評価値は[0,1]の一様分布でiidなので，n=2, f(x)=1, F(x)=xとできる.
- このとき，先ほどの式に代入すると，2番目に高い値のpdfは $2(1-x)$ となる．よって期待値は

$$E[Y_2] = \int_0^1 x \cdot g_2(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = 1/3$$

- よって2位価格オークションにおける期待収入も1/3となり，1位価格オークションと2位価格オークションにおける売り手の期待収入は均衡において等しいことが明らかとなった！

一般化した2位価格オークションの期待収入

- 二人だからうまくいくんだろ？と言いたい気持ちを抑えて，一般化を考える
- 今度は2位価格オークションの方が簡単なので，こっちを先にやる．
- 売り手の期待収入はiidな分布F(x)から取られたn個の評価額のうち，2番目に高いものの期待値となる．
- これをR_{sp}とかくと $$R_{sp} = E[Y_2] = \int_0^1 x dG_2(x)$$
- これを部分積分して変形すると $$R_{sp} = 1 - \int_0^1 G_2(x)dx$$
- よって評価値が一様分布に従うという特殊な場合，f(x)=1，F(x)=xなので， $$R_{sp} = \frac{n-1}{n+1}$$
- と一般的に書ける．
- これはVickrey (1961)の記念すべき結果の一つである．

一般化した1位価格オークションの期待収入(1)

- 2位価格オークションは落札したときの支払い額が自分の入札額に依存していない．そのため，自身の評価額で入札するのが最適である.
- 一方で，1位価格オークションでは余剰を大きくするために，評価値よりもビッドシェイディングする必要がある．そのため，非常に戦略的状況であり，他の競争相手の意思決定により強く依存している.
- 以上より，1位価格オークションにおける入札額を決めることは2位価格オークションに比べて，はるかに微妙な問題である

一般化した1位価格オークションの期待収入(2)

- 簡単に計算できる特殊な場合から始める．つまり，評価値はiidで区間[0,1]の一様分布．
- n人の買い手全てが自分たちの評価値を知っており，買い手1の評価値はv_1とする．他の買い手の評価値はそれぞれv_2, ..., v_nである．2人のみのケースの場合と同様，未知の入札額をbとして，他の買い手達の入札額を $\theta v_i, i=1,2,...,n$ とする．
- これは1位価格オークションなので，落札すればbを支払うことになり，評価値がv_1であるなら，余剰は$b-v_1$となる．
- それゆえ，bを以下の式を最大にするように選ぶこととなる．

$$E[\text{余剰}] = (v_1 - b) \cdot pr\{\text{買い手1が落札}\}$$

一般化した1位価格オークションの期待収入(3)

- ここで，買い手1が落札する確率は自分自身の入札額に依存するだけでなく，他の競争相手が共通の入札関数を利用しており，それはθv_iという仮定にも依存していることを理解して計算する必要がある．具体的に言えば，買い手1が落札する確率は他のn-1人の競争相手の入札額$\theta v_2, \ldots, \theta v_n$がすべて買い手1の入札額b以下である確率であり，これは評価値がiidの一様分布に従う場合,$(b/\theta)^{n-1}$となる．よって

$$E[\text{余剰}] = (v_1 - b) \cdot (b/\theta)^{n-1}$$

- これをbについて最大にすればよいので，偏微分して0とすると

$$b = \left(\frac{n-1}{n}\right) v_1$$

- となる．つまり，ビッドシェイディングする最適量は評価値の1/nであることがわかる．

一般化した1位価格オークションの期待収入(4)

- 買い手1の期待支払額は落札確率に入札額をかけたものである．落札確率は他の全ての買い手達の評価値の中で買い手1が最も高い確率なので v_1^{n-1} である．
- 買い手1の入札額は $((n-1/n)\cdot v_1)$ なので，

$$E[\text{買い手 1 の支払額}] = \left(\frac{n-1}{n}\right) v_1^n$$

- ここで，あらゆるv1の値に渡って平均を取る，
- つまり $\int_0^1 v_1^n dv_1 = 1/(n+1)$ となるので，
- 結局買い手1の期待支払額は $\frac{n-1}{n\cdot(n+1)}$ となる．よってn人すべての期待支払額，つまり売り手の期待収入は $\dfrac{n-1}{n+1}$
- となり，これは2位価格オークションにおける売り手の期待収入と同じである．
- このように1位価格オークションと2位価格オークションとの間の収入同値性を確かめることができた！

より一般化した1位価格オークション(1)

- n人で評価値が[0,1]でなく，より一般的な場合
- 買い手たちの評価値はiid
- 自身の入札関数を$b(v_1)$，他の競争相手の入札関数を$\beta(v_1)$とする
- 買い手1の期待余剰は

$$E[\text{余剰}] = (v_1 - b(v_1)) \cdot pr\{\text{ 買い手 1 が落札する確率 }\}$$

- 買い手1が落札する確率を考える．買い手の評価値のcdfはF(v)で共通であり，$\beta(v_i) < b(v_1), i = 2, ...n$ という条件をF(v)を用いて次のように表したい．

$$pr\{\beta(v_i) < b(v_1)\} = pr\{v_1 < \beta^{-1}(b(v_1))\} = F(\beta^{-1}(b(v_1)))$$

- そのためには追加的な仮定として，β(v)が逆関数をとれる必要があるので求めようとしている均衡入札関数は厳密な単調増加関数であると仮定する．

より一般化した1位価格オークション(2)

- すると，買い手1が落札する確率はn-1個の同一のcdfの積として書くことができて，$\prod_{i=2}^{n} F(\beta^{-1}b(v_1)) = F(\beta^{-1}(b(v_1)))^{n-1}$
- 次に期待余剰を最大化するように入札関数を選ぶので，

$$E[\text{余剰}] = (v_1 - b(v_1)) \cdot F(\beta^{-1}(b(v_1)))^{n-1}$$

- をbに関して偏微分した導関数を0とおくと，最適であるための一般的な必要条件は $\dfrac{\partial E[\text{余剰}]}{\partial b}$ =0
- が得られる，これを計算するためには

$$(\beta^{-1}(b))' = \frac{1}{\beta'(\beta^{-1}(b))}$$

- と均衡におけるβ(v)=b(v)を用いると，

より一般化した1位価格オークション(3)

- 以下の常微分方程式が求まる

$$b'(v) + \frac{(n-1)f(v)}{F(v)}b(v) = \frac{(n-1)f(v)}{F(v)}v$$

- これは一回線形なので積分可能であり，

$$b'(v) + C(v)b(v) = D(v)$$

- という任意の微分方程式に対して，

$$e^{\int C(v)dv}$$

- という積分因子をかけることでうまくいく，すると

$$b'(v)e^{\int C(v)dv} + b(v)C(v)e^{\int C(v)dv} = D(v)e^{\int C(v)dv}$$
$$\frac{d}{dv}\left(b(v)e^{\int C(v)dv}\right) = D(v)e^{\int C(v)dv}$$

- となり，一般解として

$$b(v) = e^{-\int C(v)dv}\int D(v)e^{\int C(v)dv}dv + \gamma e^{-\int C(v)dv}$$

より一般化した1位価格オークション(4)

- ここで，当初の問題では$C(v)=(n-1)f(v)/F(v), D(v)=vC(v)$
- なので，積分因子は $e^{\int C(v)dv}=e^{\int \frac{(n-1)f(v)}{F(v)}dv}=F(v)^{n-1}$
- となり，解は $b(v)=v-\dfrac{\int F(v)^{n-1}dv-\gamma}{F(v)^{n-1}}$
- となる．次に，オークションでは評価値が0の買い手は正の入札をすることはないから，b(0)=0であることは明らかである．よって0からvまで積分し，γ=0とすると

$$b(v)=v-\frac{\int_0^v F(y)^{n-1}dy}{F(v)^{n-1}}$$

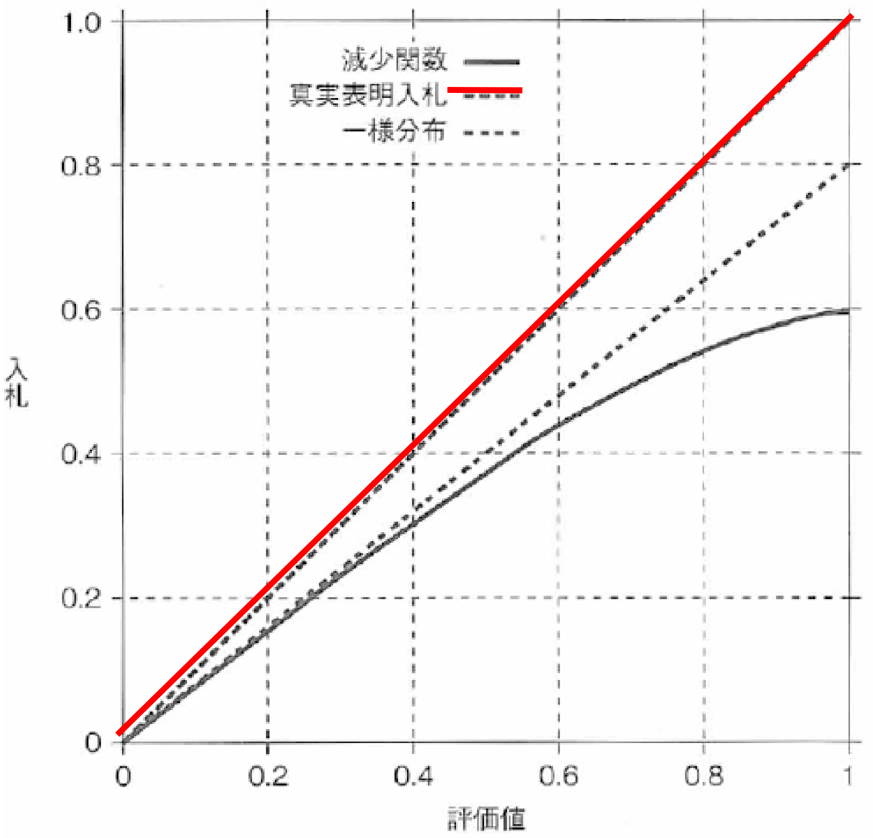
- となる．このとき，入札関数が単調増加関数であるという仮定を満たしているかどうかをチェックする必要がある．

より一般化した1位価格オークション(5)

- このとき，均衡において買い手はちょうど正確に

$$\frac{\int_0^v F(y)^{n-1}dy}{F(v)^{n-1}}$$

- だけビッドシェイディングすれば良いことを示している．



より一般化した1位価格オークション(6)

- このときの売り手の期待収入は，買い手1の期待支払い額をn倍したものなので，

$$R_{fp} = nE[\text{買い手 1 の支払い額}] = nE[b(v_1)pr\{\text{ 買い手 1 が落札する確率 }\}]$$
$$= n\int_0^1 b(v)F(v)^{n-1}dF(v)$$

- ここでb(v)の均衡入札関数を代入すると

$$R_{fp} = 1 - n\int_0^1 F(v)^{n-1}dv + (n-1)\int_0^1 F(v)^n dv$$

- となる．ここで $G_2(x) = nF(x)^{n-1} - (n-1)F(x)^n$ を思い出すと

$$R_{fp} = 1 - \int_0^1 G_2(x)dx$$

- 実は $R_{sp} = 1 - \int_0^1 G_2(x)dx$ であったので，一致！
- これは理論経済学の最も重要な結果の1つである

収入同値定理のまとめ

- 結果１：収入同値定理
- 買い手の私的評価額が独立かつ同一の分布とする．このとき，均衡においては1位価格オークションおよび2位価格オークションにおける売り手の期待収入は等しい

- この結果は後ほど説明するように，もっと一般的なオークションにまで拡張可能である
- しかし，この収入同値定理は現実には成り立たないことが多く，また理論においても多くの重要な状況下では成り立たないことに注意すべき！
- 以降のほとんどオークション理論は収入同値定理が，いつどのようなときに成り立たないかを調べるような研究が数多く生まれている

ここで，一山目を越えた感じ

- これまでのオークションを整理すると，

イギリス式 ≈ ヴィッカレー　および　オランダ式 ≡ 1 位価格

- であり，前者は弱い同値性，後者は戦略的同値性を意味する．さらに，買い手の評価値がiidな分布であれば，均衡において売り手に同じ期待収入をもたらす
- これがオークション理論の最初の土台となる成果であり，Vickrey (1961)のエッセンスである．
- 次への助走として，全員支払いオークションを考えてみる．

全員支払いオークション(1)

- 議席獲得を目指す候補者は選挙キャンペーンにどれくらい支出すべきかをオークションとして捉える
- 販売されているものは議席であり，勝者は１人
- 参加者は選挙後，支出した費用の払い戻しを受けることができない．
- つまり，勝っても負けてもお金は返ってこない．このようなオークションを考える．
- 全員支払いオークションの余剰はこれまでの1位価格オークションのときと同様に書けるが，入札額はこれまでの期待支払い額のように落札する確率を掛けたりしない（常に取られるので…）すると，

$$E[\text{余剰}] = v_1 F(\beta^{-1}(b(v_1)))^{n-1} - b(v_1)$$

全員支払いオークション(2)

- これまで同様，余剰の期待値の導関数を0とおいて，買い手2の競争相手の入札戦略βが均衡ではbと同じであるとすると，

$$b'(v) = v(n-1)F(v)^{n-2}f(v) = v\frac{dF(v)^{(n-1)}}{dv}$$

- これを積分することで，

$$b(v) = \int_0^v y dF(y)^{n-1}$$

- となる．積分定数は0とする．これは評価値0のとき，入札額が0だからである．

全員支払いオークション(3)

- 典型的な例として一様分布をとりあげると，F(v)=vなので，n人で競争する際の全員支払いオークションの均衡入札額は1位価格オークションの場合の $\frac{n-1}{n}v$ と異なり，

$$b(v) = \frac{n-1}{n}v^n$$

- となる．これは買い手が十分高い入札をするためには非常に高い評価値を持っている必要があるというものであり，たとえば20人で0～100ドルの間での一様分布のとき，自身の評価値が90ドルであるとすると，均衡入札額は11.55ドルになる．
- 90ドルのように高くても，オークションで落札する確率は高くないので，落札に失敗したときのリスクを考えて，低めの額で入札するのである．

全員支払いオークション(4)

- このような変わったオークションでさえ，期待支払い額は1位価格オークションと正確に同じであり，よって売り手の期待収入も正確に同じである
- 従って，全員支払いオークションは標準的な4つのオークションと収入同値であり，収入同値性という性質はある性質をもった広いクラスに適用される一般的な現象であることが確認される．
- ここからRiley and Samuelson (1981)へ繋がる．

Riley and Samuelson (1981)

- 売り手の収入を最大化するという観点で最適オークションの設計を考える
- ここでは最小受諾価格，つまり留保価格を設定することを考え，これまで議論してきた4つの基本形と比べて，売り手の期待収入をより大きなものにする選択肢があるかどうかの検討をはじめる
- ここで，ライリーとサムエルソンのクラスという概念を考える.

ライリーとサムエルソンのクラス

- オークションクラスA_{rs}は以下のように定義される

1. 売り手が一人で分割不可能な商品を１つ販売している
2. 売り手は受け入れ可能な最低入札額b0を公示する.この価格を留保価格と呼ぶ
3. n人の入札者がおり，彼等の評価値をviで表す
4. これらの評価値はiidな分布に従う．この関数は厳密に増加関数で微分可能．範囲は[0,1]
5. 厳密な増加関数である入札関数b(v)に応じてSBNEが存在する
6. 最も高い入札額を提示した買い手が商品を獲得する
7. 匿名性が保たれた支払いルール（全員に共通）である.

収入(1)

- オークションA_{rs}の一般的な性質をみる．買い手の期待余剰をまず考える
- 入札関数をb(z)としたとき，買い手1の期待余剰は

$$v_1 F(z)^{n-1} - P(z)$$

- ここで，買い手1の期待支払い額はP(z)である．入札関数がSBNEであるためには期待余剰がz=v1で最大になる必要がある．よって偏微分すると，

$$x\frac{d}{dx}[F(x)^{n-1}] - P'(x) = 0$$

- 次に境界条件を求める．これは単純なように見えて，非常に重要．評価値v_*が存在し，それを最低価値と呼ぶ．この値以下では入札しても利益が出ない値である．v*では期待余剰が厳密に0になり，これが望ましい境界条件である．

$$P(v_*) = v_* F(v_*)^{n-1}$$

収入(2)

- v_*からv_1の範囲で両辺を積分すると

$$\int_{v_*}^{v_1} P'(x)dx = \int_{v_*}^{v_1} xdF(x)^{n-1}$$

- が得られる．これをさらに部分積分すると

$$P(v_1) - P(v_*) = v_1 F(v_1)^{n-1} - v_* F(v_*)^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} F(x)^{n-1}dx$$

- となる．境界条件の式を用いると，次の式が得られる．

$$P(v_1) = v_1 F(v_1)^{n-1} - \int_{v_*}^{v_1} F(x)^{n-1}dx$$

- この式は評価値v_1を所与とし，最低価値v_*としたときに，クラスA_{rs}に属する売り手の収入を最大化するオークションの期待支払い額について述べている．しかも，この結果はオークション方式に依存していない！

収入(3)

- 対称性により，すべての買い手の期待支払い額は等しく，売り手の期待収入は買い手の期待支払い額をn倍したものなので，

$$R_{rs} = n\int_{v_*}^{1}[vF(v_1)^{n-1} - -\int_{v_*}^{v} F(x)^{n-1}dx]dF(v)$$

- となる．この収入をR_{rs}と呼ぶ．これを変形すると

$$R_{rs} = \int_{v_*}^{1}[v - \frac{1-F(v)}{f(v)}]dF(v)^n$$

- 書き換えると，$R_{rs} = \int_{v_*}^{1} MR(v)dF(v)^n$

ただし，$MR(v) = v - \dfrac{1-F(v)}{f(v)}$

- このMRは限界収入と呼ばれたり，仮想評価値と呼ばれる．

収入(4)

- 結果２：収入同値性その２
- ライリーとサムエルソンのクラスに属するいかなるオークションにおいても，均衡における売り手の期待収入額は等しい．さらに様々なオークションが存在するにもかかわらず，この期待収入は最低価値v_*だけの関数である．

最適留保価格(1)

- 次に売り手がどのように最適な留保価格b_0を決定するかを検討する
- ライリーとサムエルソンのクラスA_{rs}に従うと，留保価格は売り手が持ついくつかの選択肢の１つ.
- 新しく変数を１つ導入する．それは売り手にとっての商品の評価値でありv_0で表す.
- 売り手は期待総収入を最大化したい．留保価格b_0がない場合は売り手は商品を保持したままである．このような事態が発生する確率はすべての入札額がv_*より小さいときの確率　$F(v_*)^n$]じである.
- このケースの期待金額が$v_0F(v_*)^n$で総期待収入は

$$R_{rs}^{total} = v_0F(v_*)^n + \int_{v_*}^{1} MR(v)dF(v)^n$$

- となる.

最適留保価格(2)

- b0を調整することは最低価値v*に影響を与える．よってv0の代わりにv*を調整することを考える．上記の式をv*について微分したものを0とおくと，

$$v_0 nF(v_*)^{n-1} f(v_*) - MR(v_*) nF(v_*)^{n-1} f(v_*) = 0$$

- となる．これは

$$MR(v_*) = v_0$$

- または

$$v_* - \frac{1 - F(v_*)}{f(v_*)} = v_0$$

- と等しい．
- この式は分布Fと売り手の評価値v0が与えられるだけでv*が決まる条件を与えている．v*が買い手の数にもオークション形式にも依存しないことは注目に値する．いったんv*が決まると，売り手はこの値の下で適切な留保価格b0を見つけなければならない．
- １位価格オークション，２位価格オークションにおいて，最適留保価格b0はv*と等しい．この証明にあたって，２位価格オークションの落札者はたとえ自分の入札額だけが最適留保価格より高かったとしても，最低限留保価格を支払わねばならないという事実を用いる．これは単純だが重要である．というのは，この設定が2位価格オークションにおいて留保価格を0より高くするインセンティブを与えるからである．
- 性質１：1位価格オークションおよび2位価格オークションにおいて，最低価値は最適留保価格に等しい．
- すなわち，v* = b0である．

最適留保価格がある場合の1位価格オークション(1)

- 評価値が[0,1]の一様分布に従う1位価格オークションを考える．簡単のためv0=0である
- このとき，仮想評価値MRは

$$MR(v) = v - \frac{1-F(v)}{f(v)} = 2v - 1$$

- となり，v*=1/2となる．これは買い手の数とオークション形式から独立である．つまり，性質１から1位および2位価格オークションでは最適留保価格b0=v*=1/2である
- 最適留保価格がある場合の1位価格オークションの均衡入札関数はどうなるか？一般形を再掲すると

$$b(v) = v - \frac{\int F(v)^{n-1} dv + \gamma}{F(v)^{n-1}}$$

最適留保価格がある場合の1位価格オークション(2)

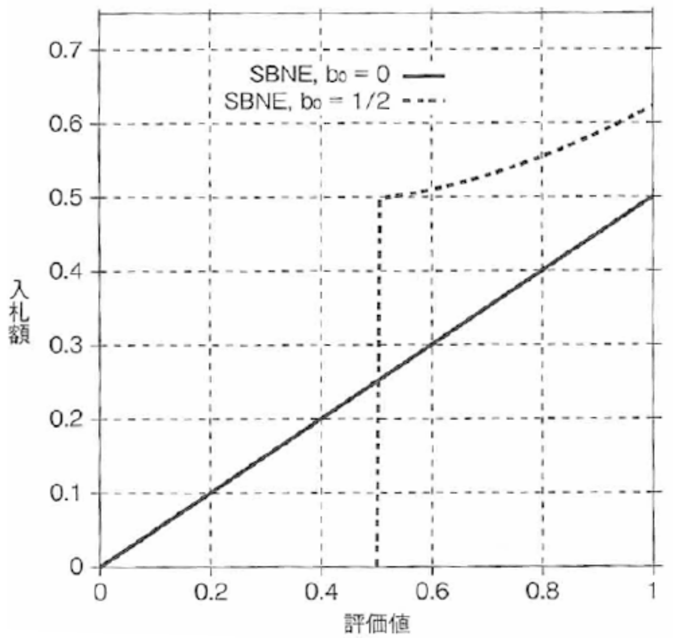
- 最低価値v*では期待余剰が0という条件を加えると,

$$b(v) = \begin{cases} 0 & v < v_* \text{の場合} \\ v - \dfrac{\int_{v_*}^{v} F(x)^{n-1} dx + \gamma}{F(v)^{n-1}} & v \geq v_* \text{の場合} \end{cases}$$

- 例を簡単にするため，2人，b0=v*=1/2, F(v)=v のとき，上記の式は

$$v \geq 1/2 \text{ に対して } b(v) = \frac{v}{2} + \frac{1}{8v}$$

- オークションの期待収入を計算する．最適に選択された留保価格は売り手の利になることが予想される．
- b0=1/2に対して収入5/12
- b0=0に対して収入4/12であり
- 売り手の期待収入は25%増加で著しい



最適留保価格がある場合の2位価格オークション(3)

- 2位価格オークションでは，真の評価値を正直に入札する戦略が弱支配戦略であり，自分の評価値v1が最低価値v*を越える場合はいつでもv1を入札する．このときの買い手1の期待支払い額は

$$P_{sp} = \begin{cases} 0 & v_1 < v_* \text{の場合} \\ \int_0^{v_*} v_* dv_2 + \int_{v_*}^{v_1} v_2 dv_2 & v_1 \geq v_* \text{の場合} \end{cases}$$

- 売り手の期待収入は上を2倍して，v1≧v*となる評価値で平均すると

$$v_*^2 - (4/3)v_*^3 + 1/3$$

- この式をv*について微分すると最適なv*の値1/2が得られる．よって期待収入は5/12であり，1位価格オークションと等しくなる．

サッド・ルーザー・オークション(1)

- 2人の買い手，評価値[0,1]で一様分布，v0=0
- 落札者は何も支払わなくてよい．敗者は入札額を支払う．しかし，これもA_{rs}に属している．
- 買い手1の期待利潤は

$$v_1 \geq v_* \text{に対して}\ v_1 F(v_1) - b(v_1)(1 - F(v_1))$$

- 最低価値v*で入札するとき，期待余剰は0であり，b(v*)=b0であるので，$b_0 = \dfrac{v_*^2}{1 - v_*}$
- 収入を最適化するとき，v*=1/2であることを使うとb0=1/2である．
- 期待支払い額 $P(v) = b(v)(1 - F(v))$ と $P(v) = v^2 - \int_{v_*}^{v} s dx$
- より，$b(v)(1 - v) = v^2 - \displaystyle\int_{v_*}^{v} s dx$

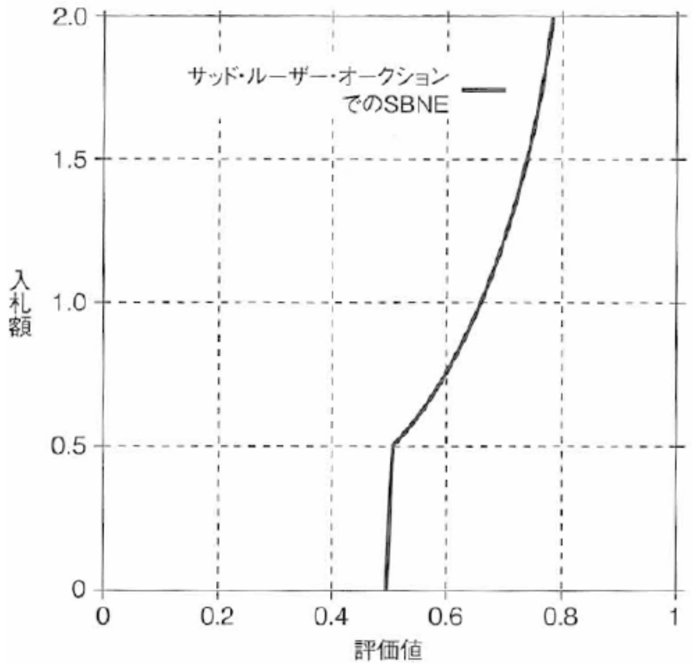
さらに，$v_* = 1/2$ より，$v \geq 1/2$ に対して $b(v) = \dfrac{v^2 + 1/4}{2(1 - v)}$

サッド・ルーザー・オークション(2)

- サッドルーザーオークションの期待収入がクラスArsに属し，他の最適オークションと同額であることを確認する

$$E[\text{支払い}] = \int_{v_*}^{1} b(v)(1 - F(v))dv$$

- より，v*=1/2では5/24となる．よって期待収入はその2倍なので5/12である



Riley and Samuelson (1981)のまとめ

- クラスA_{rs}に所属しているオークションは全て期待収入や支配支払い額が厳密に等価である
- これにより，標準的な４つのオークション形式からより広く抽象的なクラスの議論ができるようになった
- 売り手は最適留保価格を扱うことで，期待収入を増加させることができる.
- その場合であっても，オークション形式は関係ない.

- もちろんVickrey (1961)と同様，現実がこの理論に適すると言いたいわけではない
- 以降の研究はこのクラスの制約から逃れることに大きな関心が払われてきた
- ２つめの山を越えた

MYERSON (1981) & MILGROM AND WEBER(1982)

- これまでの理論は買い手たちの評価値は独立で同一の分布をもつ私的価値であるとされてきた．オークション形式は結果に影響を与えないと結論づけるが，現実をみたときに何かきまりが悪い．
- 伝統的な大手オークションハウスでイギリスオークションが好まれてきたことやeBayの形式がネットワークションで好まれているという事実がある．
- 「同じ商品に対して買い手の評価値の分布がそれぞれ異なっている」「買い手はしばしば自分たちの評価値について不確実である」「評価値は互いに関連しており，買い手は競争相手の入札額を観察することで有益な情報を引き出すことができるのか」「競り上げ競争の存在」等，オークション理論にはまだまだ反映すべき複雑性が存在する．
- 大ざっぱに言えば，これらは「相互依存的な評価値」を考慮する研究と「買い手間の非対称性」を考慮する研究に分けられる．
- まず，相互依存的な評価値を考え，次に独立・私的価値における買い手間の非対称性を考慮した理論を考える．

相互依存的な評価値

- 買い手はいつも自分の評価値を確実には知らないという状況をモデル化する.
- 買い手たちが自分の評価値に関して，一般に確率変数であるシグナルsiという形である程度不確実な情報をもっていると仮定する．買い手の利得を決定する実際の評価値は次の関数となる.

$$v_i = \varphi_i(s_1, s_2, ..., s_n)$$

- 独立価値モデル

$$v_i = \varphi_i(s_1, s_2, ..., s_n) = s_i$$

- 共通価値モデル

$$v_i = \varphi_i(s_1, s_2, ..., s_n) = V$$

相互依存的な評価値

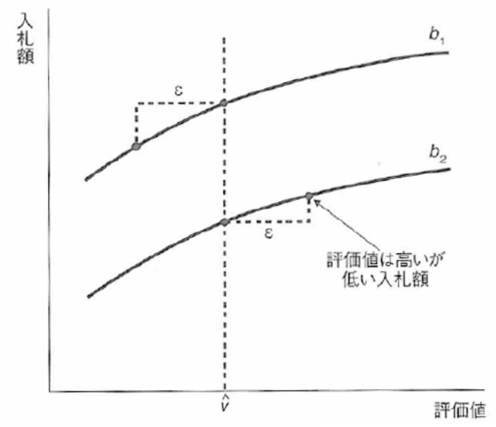
- Milgrom and Weber (1982)によると，一般的な価値関連モデルでは，４つの標準的なオークション形式は，期待収入が次のように異なる
- イギリス＞2位価格＞1位価格＝オランダ式

非対称な買い手たち

- Myerson (1981)は収入を最大化するという目標を追求しながら，販売メカニズムについて現代的な新しいアイデアを導入している.
- 特に，顕示原理は非対称な買い手たちに直面したときに収入を最大化するには通常とは違うオークション形式を採用し，通常は売り手には利用可能ではない買い手たちの情報が必要になると述べている.

効率性

- 定義：緩やかな効率性：販売メカニズムが効率的であるというのは，商品が販売されるときに最も高い評価を与えている買い手が必ずそれを購入するときである
- ライリーとサムエルソンのクラスのオークションはすべて効率的である
- 非対称な買い手の下での1位価格オークションは状況が全く異なる．入札関数が互いに異なれば，評価額が大きくても入札額が小さくなることがありうる．よって，非効率な状況が正の確率で生じる．



非対称的な買い手の場合のマイヤーソンの最適メカニズム(1)

- これまでの評価値zに対する落札確率$F(z)^{n-1}$ はダメ
- 配分関数と呼ばれるＱによって落札者を指名
- 同様に，販売時の支払い額を任意の関数Ｐで指定
- 組(Q,P)を直接メカニズムと呼び，これによってオークションのルールが決定され，執行されるとする.
- こうすることであらゆる交渉ルールに拡張可能

- つまり，買い手たちは直接メカニズムに真の評価値を報告するだけで，自動的に決まる
- では，買い手たちは嘘をつくインセンティブはないのか？
- もしあれば，均衡の定義より均衡入札額ではない.

非対称的な買い手の場合のマイヤーソンの最適メカニズム(2)

- 定義：どのようなメカニズムに参加している主体も嘘をつくインセンティブがないなら，このメカニズムはインセンティブ両立的と呼ばれる
- 結果4（顕示原理）：均衡行動を考える限り，あらゆる交渉はインセンティブ両立的な直接メカニズムによって置き換え可能である
- つまり，顕示原理のおかげで複雑な入札関数に対応した複雑なオークション形式に触れずに直接メカニズムだけに注意を集中することができる．必要なことはただ直接メカニズムを決定する組(Q,P)のみである

非対称的な買い手の場合のマイヤーソンの最適メカニズム(3)

- 非対称な買い手の場合，これまでの最も高い価値を持つ買い手が落札するという前提が成り立たない．つまり， $v_iF(z)^{n-1} - P(z)$ 用できない
- iが落札する確率をzのみの関数として表すと

$$Q_i(z) = \int_{V_i} Q_i(z, \mathbf{v_{-i}}) d\mathbf{F}(\mathbf{v_{-i}})$$

- iがzを入札したときの期待支払い額は

$$P_i(z) = \int_{V_i} P_i(z, \mathbf{v}_{-i}) d\mathbf{F}(\mathbf{v_{-i}})$$

- このように一般的に書き換えることで，期待余剰は
- となり，も $S_i(z) = v_iQ_i(z) - P_i(z)$:買い手ごとに異なることを示している

非対称な買い手の収入同値定理

- さきほどの期待余剰を真の評価値viで微分したとき，

$$v_i Q_i'(v_i) - P_i'(v_i) = 0$$

- z=viとおいたとき，viに関して全微分すると

$$S_i'(v_i) = v_i Q_i'(v_i) + Q_i(v_i) - P_i'(v_i)$$

- 偏微分の式を全微分の式に代入すると

$$S_i'(v_i) = Q_i(v_i)$$

- これを積分すると，期待余剰は評価値の関数となる

$$S_i(v_i) = S_i(0) + \int_0^{v_i} Q_i(x)dx$$

- よって期待支払い額は $P_i(v_i) = P_i(0) + v_i Q_i(v_i) - \int_0^{v_i} Q_i(x)dx$
- であり，期待支払い額はただ配分関数に依存するのみで，同じ配分関数をもつあらゆる販売メカニズムは売り手に同じ収入をもたらす．これは一般的な設定の下での収入同値定理である．

（まとまってない）まとめ

- Vickrey (1961)では1位価格と2位価格オークションの間の収入同値性を示した.
- Riley and Samuelson (1981)では広いオークションクラスA_{rs}を定義し，その中に含まれているオークション形式はどんなものでも収入同値性が成り立つことを示した.
- また，最適留保価格が売り手の収入を増加させることを示した
- Milgrom and Weber (1982)は相互依存的な価値のオークションの分析を,
- Myerson (1981)では非対称な売り手における，より一般的な収入同値性を示した.