



# 論文ゼミ (修士論文にむけて)

M2 浦田淳司

2009.12.02(Wed)

# 修士研究：全体見取り図

第1章 背景・目的

第2章 既往研究

(避難行動・ゲーム理論・ネットワーク分析・複雑ネットワーク)

第3章 調査概要

第4章 基礎分析

第5章 紐帯生成モデル

(マイクロモデル)

第6章 巨視モデルの適用

(適応度モデル)

第7章 ネットワーク評価

第8章 結論

# 2章 概要

## 第2章 既往研究の整理

### 2.1 避難行動研究の整理

避難意思決定, 住民内情報伝達

### 2.2 ゲーム理論

利他的選好, 限定合理性, フォーメーションゲーム

### 2.3 ネットワーク分析指標

グラフ理論, 中心性分析, 構造分析, 次数分析

### 2.4 複雑ネットワークモデル

スモールワールドモデル, 閾値モデル,  
BAモデル, 適応度モデル

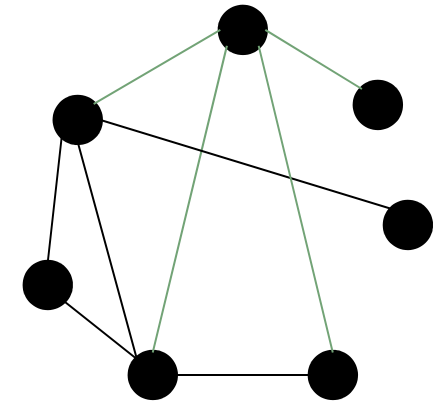
### 2.5 ネットワーク分析実証系研究の整理

### 2.6 研究の位置づけ

## 2.3 ネットワーク分析

### 2.3.1 グラフ理論

グラフの種類, 距離, クラスタ係数



### 2.3.2 中心性分析

次数中心性, 媒介中心性, 切断中心性, 情報中心性

### 2.3.3 構造分析

構造同値 (縮約), ブロックモデル

### 2.3.4 次数特性

次数分布 (SF性), 結合相関

- Stanley Wasserman: Social Network Analysis: Methods and Applications, Cambridge University Press, 1994
- 金光淳: 社会ネットワーク分析の基礎-社会的関係資本論にむけて-, 勁草書房, 2003

## 2.4 複雑ネットワークモデル

### 2.4.1 スモールワールドモデル

枝のつながりかえにより、複雑ネットワークを生成  
短い平均距離 $L$ と大きいクラスター性 $C$ を実現, SF性なし

### 2.4.2 閾値モデル

二つのノードの持つ値の和が閾値を越えれば、リンク生成  
SF性・短い $L$ ・大きな $C$ を実現, 協調的モデル

### 2.4.3 BAモデル

ネットワークの成長・優先的選択を考慮  
古株ほどリンクを得やすい, SF性・短い $L$ を実現

### 2.4.4 適応度モデル

BAモデルの拡張, ノードの固有の適応度 $\eta$ を考慮  
新しいノードでもハブになりうる, SF性・短い $L$ を実現

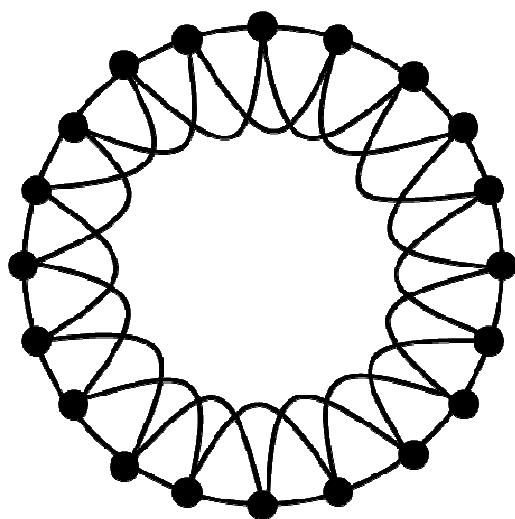
## 2.4.1 スモールワールドモデル

D. J. Watts, S. H. Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks, Nature, Vol.393, pp. 440-442, 1998

### 現実ネットワークとの対比

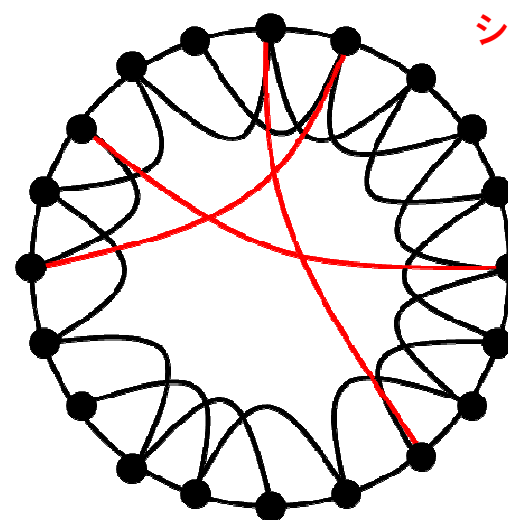
- ・ 小さい平均距離  $L$
- ・ 大きいクラスタリング係数  $C$   $\longleftrightarrow$  ・ 次数分布のベキ則は実現なし
- ・ 大きすぎない平均次数  $k$

### スモールワールドモデルの形成



はじめのネットワーク

- ・ 全ノード数  $n$
- ・ 両隣  $k/2$  コのノードとリンク
- ・ 全リンク数  $kn/2$



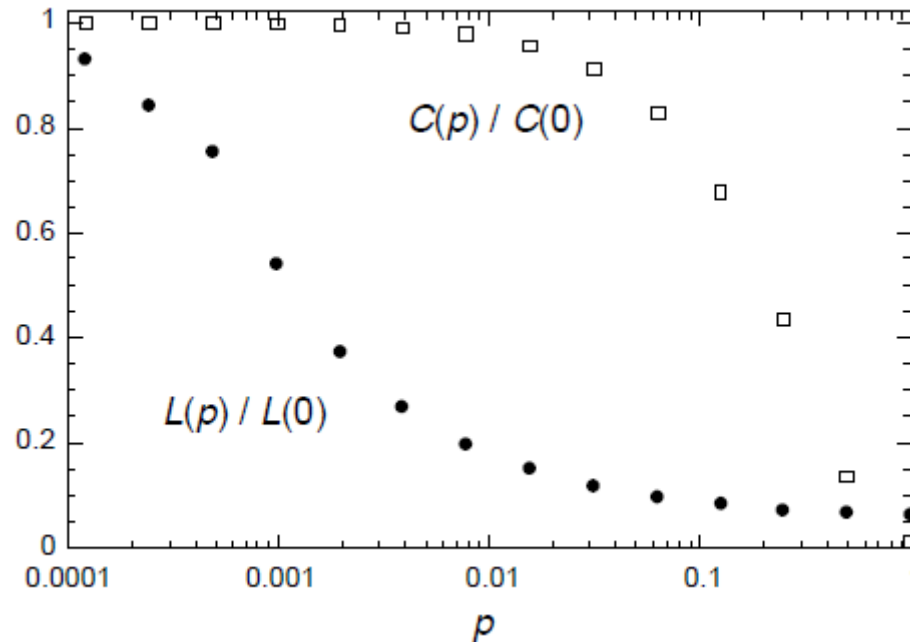
ショートカット  
の作成

割合  $p$  の枝をランダムにつなぎかえ

1.  $pkn/2$  本をランダムに選ぶ
2. 片方の頂点を切り離す (確率  $1/2$ )
3. 新しいつなぎ先をランダムに選ぶ

## 2.4.1 スモールワールドモデル

$n=1000, k=10$ から始めた時の  
平均距離とクラスタ係数の $p$ による推移



- ・ 平均距離はすぐに短くなる
- ・ クラスタ係数は保持性高い

小さい $p$ で  
短い $L$ ・大きな $C$ の実現

- 近くの相手と多く，遠くの相手とたまに結合
- 弱い紐帯への対応
- × 格子型のモデルを前提
- × 小さい $p$ のため，乱雑さは少ない
- × 非連結ネットワークになる可能性

## 2.4.2 閾値モデル

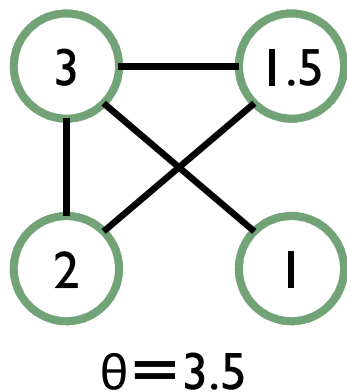
G. Caldarelli, A. Capocci, P. De Los Rios, M.A. Munoz: Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness, Physical Review Letters, Vol.89, No. 25, 258702, 2002

### モデルの特徴

- スケールフリーネットワークを実現
- 自分と相手の重みからリンクを決定
- 協調的仕組みからネットワークを形成

### 閾値モデルからのネットワーク形成

- 全ノード数  $n$
- $i$  番目の頂点  $v_i$  の重みを  $\omega_i$  とする (確率密度  $f(\omega)$  で与える)
- $\omega_i + \omega_j \geq \theta$  のとき, 頂点  $v_i$  と  $v_j$  の間にリンク形成



### ネットワークの特徴

- $\omega$  小  $\rightarrow$  クラスタ係数  $C$  大  
( $\omega < \theta/2 \rightarrow C=1$ )
- $\omega$  大  $\rightarrow$  次数大  
( $\omega > \theta \rightarrow k=n$ )
- 連結グラフ  $\rightarrow L=2$   
(最大  $\omega$  のノードに連結)



## 3.2.3 BAモデル

A. –L. Barabasi, R. Albert: Emergence of scaling in random networks, Science, Vol.286, pp. 509-512, 1999

## 3.2.4 適応度モデル

- A) G. Bianconi, A. –L. Barabasi: Competition and multiscaling in evolving networks, Europhysics Letters, Vol.54, No. 4, pp. 436-442, 2001
- B) G. Bianconi, A. –L. Barabasi: Bose-Einstein condensation in complex networks, Physical Review Letters, Vol.86, No. 24, pp. 5632-5635, 2001

## スケールフリー性を成立させるための ネットワーク生成モデル

スケールフリー則：  $P(k) \propto k^{-\gamma}$

一次数 $k$ のノードの存在確率 $P(k)$ が $k$ のべき乗に比例

# ネットワーク生成メカニズム

## ▼ルール1：ネットワークの成長表現

ノード追加 ⇒ ネットワークが時間とともに成長

**設定** 毎時，ひとつのノードがネットワークに追加  
新しいリンクをm本もつ

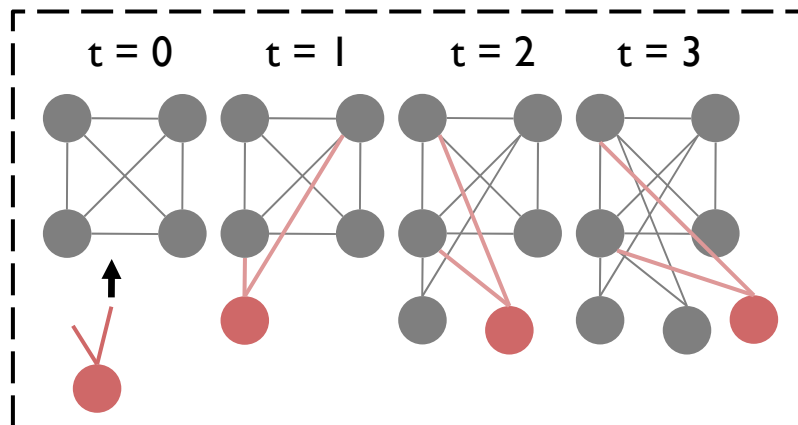
## ▼ルール2：優先的選択の記述法

リンク数と適応度が大 ⇒ 新しいリンクを得やすい

**設定** ノード $v_i$ が  
リンクを得る確率

$$\Pi(v_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j k_j}$$

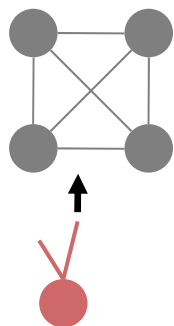
k : リンク数  
 $\eta$  : 適応度



新しい質の良いノードが  
古いノードを凌駕する

# リンク獲得確率

## ▼リンク獲得確率



$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod(k_i) = \frac{m \eta_i k_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j k_j} \quad (\text{A2})$$

( $\eta$ は各ノードに確率密度分布 $p(\eta)$ で付与)  
(全ての $\eta$ が等しいときが, BAモデルに対応)

## ▼次数 $k$ の仮定

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)} \quad (\text{A3})$$

(流入時間 $t_0$ )

(時間 $t=t_0$ のとき,  $k=m$ )

$$\left[ \begin{array}{l} 0 < \beta(\eta) < 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < \beta(\eta) \\ \beta(\eta) < 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{— 時間}t\text{ともに, 次数}k\text{増加} \\ \text{— 獲得リンクは毎時}1\text{以下なので, }t\text{より増分は小} \end{array} \end{array} \right]$$

# 分母の近似

(A2)式の分母を近似

$\rho(\eta)$ は $\eta$ の確率密度分布

$$\sum_j \eta_j k_j \cong \bar{\eta} \sum_j k_j \cong \int d\eta \eta \rho(\eta) \int_1^t dt_0 k_\eta(t, t_0)$$

(A3)式より

$$= \int d\eta \eta \rho(\eta) \cdot m \frac{(t - t^{\beta(\eta)})}{1 - \beta(\eta)} \quad (\text{A4})$$

$0 < \beta(\eta) < 1$  より

$$\left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle \stackrel{t \rightarrow \infty}{=} C m t \quad (\text{A5}) \quad C = \int d\eta \rho(\eta) \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} \quad (\text{A6})$$

# $\beta$ の導出

(A2)式に(A5)を代入

$$\frac{\partial k_{\eta}}{\partial t} = \frac{\eta_i k_i}{Ct} \quad (\text{A7})$$

(A3)式より

$$\frac{\partial k_{\eta}}{\partial t} = \frac{m\beta(\eta)}{t_0} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta)-1} = \frac{\beta(\eta)}{t} k_{\eta}$$

(A7)式と比較して

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{C} \quad (\text{A8})$$

このとき、Cは(A6)式より

$$1 = \int d\eta \rho(\eta) \frac{1}{C/\eta^{-1}} \quad (\text{A9})$$

を満たす必要がある

# kの確率分布P(k)

(A3), (A8)より, k以上となる累積確率分布は

$$k_\eta(t) > k \Leftrightarrow m \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{\eta}{C}} > k \Leftrightarrow t_0 < t \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}}$$

$$P(k_\eta(t) > k) = P \left( t_0 < t \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}} \right) = t \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}} \quad (\text{A10})$$

(A10)より, 次数kとなる確率分布は

$$P(k) = - \int_0^{\eta_{\max}} d\eta \rho(\eta) \frac{\partial P(k_\eta(t) > k)}{\partial k}$$

$$= \int d\eta \rho(\eta) \frac{Ct}{\eta k} \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}} \propto \int d\eta \rho(\eta) \frac{C}{\eta} \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta} + 1} \quad (\text{A11})$$

まだスケールフリーとは言えない

# 適応度 $\eta$ の確率分布

次数のスケールフリー性  $\rightarrow$  適応度 $\eta$ の分布 $\rho(\eta)$ 次第

**Case 1**  $\rho(\eta) = \delta(\eta - 1)$  ( $\eta$ が全て等しいとき)

$$\begin{aligned} \text{(A9)より } C=2 & \\ \text{(A8)より } \beta=1/2 & \Rightarrow \text{(A11)より } P(k) \propto k^{-3} \end{aligned}$$

**Case 2**  $\eta$ が一様分布 $[0,1]$ のとき

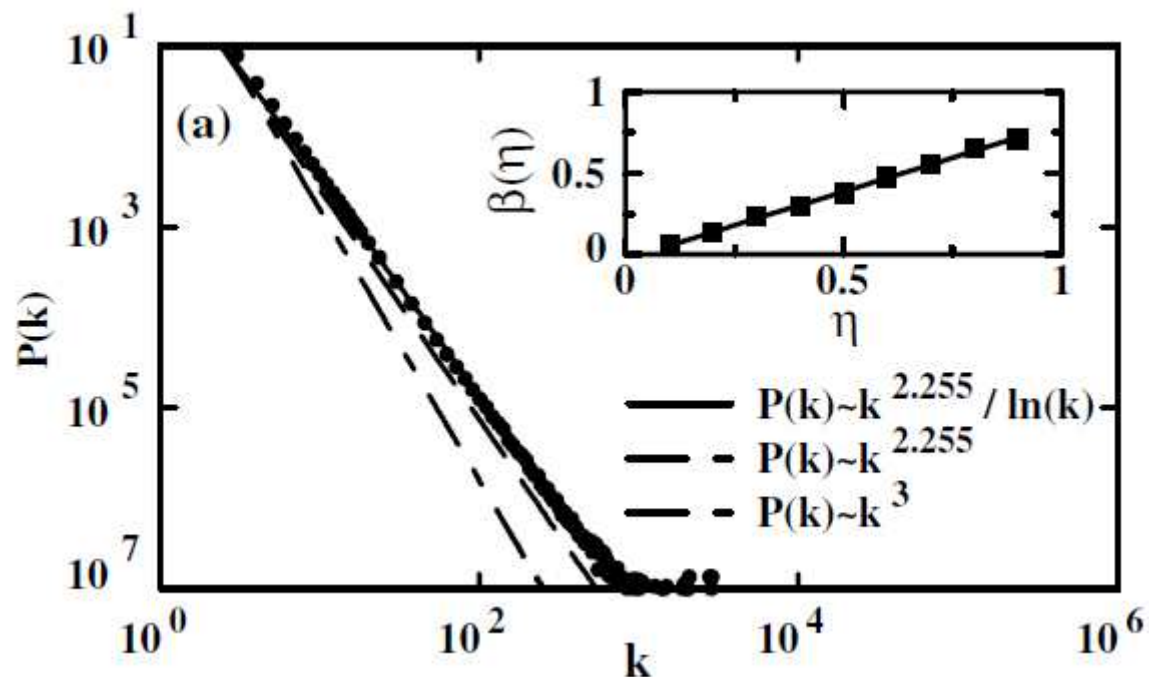
$$\text{(A9)より } 1 = \int_0^1 d\eta \frac{1}{C/\eta^{-1}} = [-C \log|\eta - C| - \eta]_0^1$$

$$\exp(-2/C) = 1 - 1/C \quad \text{(A12)} \quad (C^*=1.255)$$

$$\text{(A11)より } P(k) \propto \int_0^1 d\eta \frac{C^*}{\eta} \frac{1}{k^{1+C^*/\eta}} \approx \frac{k^{-(1+C^*)}}{\log(k)} \quad \text{(A13)}$$

べき乗と対数の逆数に比例

# 次数分布（両対数グラフ）



- $P(k) \sim k^{2.255} / \ln(k)$  は  $P(k) \sim k^{2.255}$  に比べ、傾きゆるい
- ベキ則と比較し，“super hubs”が現れうる

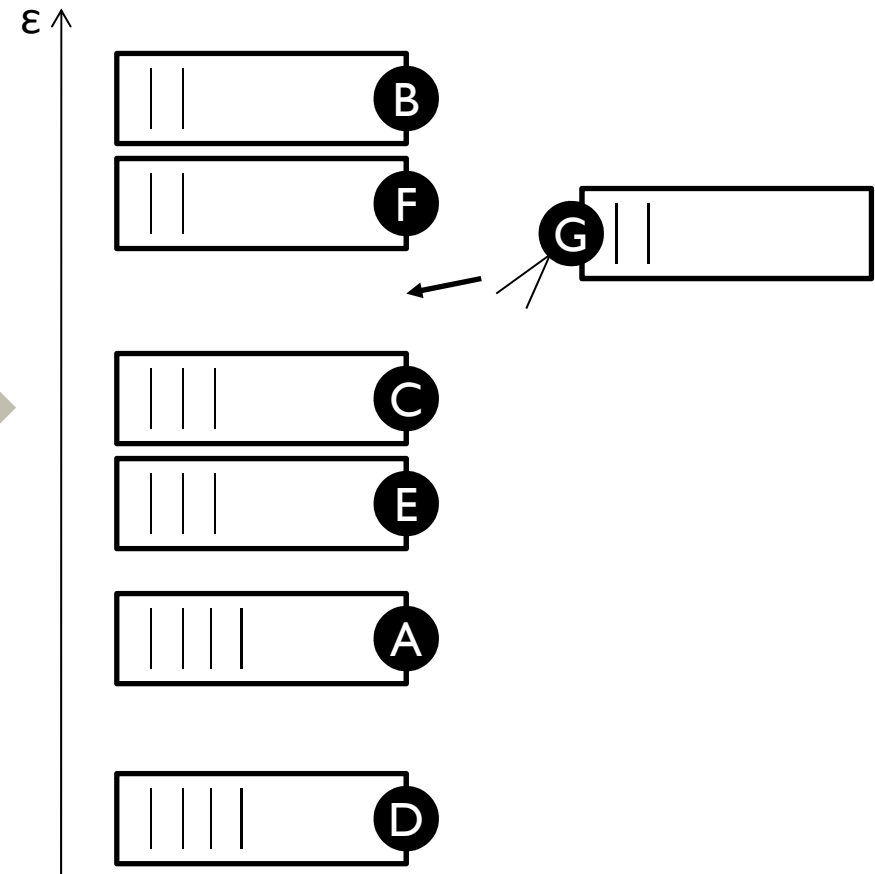
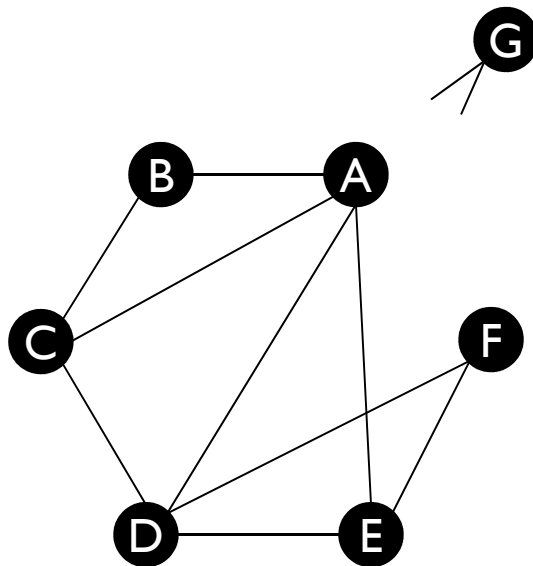


# 適応度 $\Leftrightarrow$ 粒子エネルギー準位

適応度  $\eta_i$  に粒子のエネルギー準位  $\varepsilon_i$  を対応させる

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{\beta} \log \eta_i \quad (B2)$$

ノードが準位，リンクが粒子に対応



# リンク獲得確率(Bose)

(A2), (B2)より

$$\frac{\partial k_i(\varepsilon_i, t, t_{i0})}{\partial t} = m \frac{e^{-\beta\varepsilon_i} k_i(\varepsilon_i, t, t_{i0})}{Z_t} \quad (\text{B3})$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^t e^{-\beta\varepsilon_j} k_j(\varepsilon_j, t, t_{j0}) \quad (\text{B4}) \quad \text{一分配関数}$$

次数は時間のべき乗に比例すると仮定 ((A3)と対応)

$$k_{\varepsilon_i}(t, t_{i0}) = m \left( \frac{t}{t_{i0}} \right)^{f(\varepsilon_i)} \quad (\text{B5})$$

$\eta$ の確率密度分布 $\rho(\eta)$ に対して,  $\varepsilon$ の密度分布は,

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \rho(\eta)d\eta \Leftrightarrow g(\varepsilon) = \beta\rho(e^{-\beta\varepsilon})e^{-\beta\varepsilon}$$

# 式展開 (ηと同様)

(A4)-(A6)と同様に

$$\langle Zt \rangle = \int d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} \int_1^t dt_0 k(\epsilon, t, t_0) = mz^{-1}t \quad (\text{B6})$$

$$\frac{1}{z} = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{e^{-\beta\epsilon}}{1-f(\epsilon)} \quad (\text{B7})$$

化学ポテンシャル $\mu$ を次のようにおく

$$e^{-\beta\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Zt \rangle}{mt} = z \quad (\text{B8})$$

(A5), (A8), (B6)より,  $f(\epsilon) = \beta(\eta)$ なので

$$f(\epsilon_i) = \frac{mte^{-\beta\epsilon_i}}{Zt} = e^{-\beta(\epsilon-\mu)} \quad (\text{B9})$$

(B7), (B9)より,

$$I(\beta, \mu) = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} = 1 \quad (\text{B10})$$

できん

# 凝縮過程

ネットワークのリンクがボーズ気体（理想気体）であると考え、 $n(\varepsilon)$ を粒子密度とすると、

$$\int d\varepsilon g(\varepsilon)n(\varepsilon) = 1 \quad (\text{B11})$$

(B10)より、

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (\text{B12})$$

(B5), (B6), (B9)が成立 $\Leftrightarrow$ (B10)の $\mu$ が存在

$$I(\beta, \mu) = \int d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \leq I(\beta, 0)$$

if  $I(\beta, 0) < 1$   $\beta$ ,  $g(\varepsilon)$ の解なし

$\Rightarrow$ ベキ分布の仮定が不成立 (B5)

一部の粒子が最低エネルギー準位に凝縮と考える

## 凝縮過程(2)

粒子のうち、 $n_0(\beta)$ だけ凝縮していると考える

まず、凝縮していないとき、全粒子数 ( $2mt$ ) は、

$$2mt = \sum_{t_0=1}^t k(\varepsilon_{t_0}, t, t_0) = mt + mtI(\beta, \mu) \quad (\text{B13})$$

$I(\beta, 0) < 0$ のとき

$$2mt = mt + mtI(\beta, \mu) + n_0(\beta) \quad (\text{B14})$$

$$\frac{n_0(\beta)}{mt} = 1 - I(\beta, 0) \quad (\text{B15})$$

**ある割合だけ、凝縮**

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod (k_i) = \frac{m \eta_i k_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j k_j} \quad (\text{A2})$$

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)} \quad (\text{A3})$$

$$\sum_j \eta_j k_j = \int d\eta \eta \rho(\eta) \cdot m \frac{(t - t^{\beta(\eta)})}{1 - \beta(\eta)} \quad (\text{A4})$$

$$\left\langle \sum_j \eta_j k_j \right\rangle^{t \rightarrow \infty} = C m t \quad (\text{A5})$$

$$C = \int d\eta \rho(\eta) \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial k_\eta}{\partial t} = \frac{\eta_i k_i}{C t} \quad (\text{A7})$$

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{C} \quad (\text{A8})$$

$$1 = \int d\eta \rho(\eta) \frac{1}{C/\eta^{-1}} \quad (\text{A9})$$

$$P(k_\eta(t) > k) = t \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}} \quad (\text{A10})$$

$$P(k) \propto \int d\eta \rho(\eta) \frac{C}{\eta} \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta} + 1} \quad (\text{A11})$$

$$\frac{\partial k_i(\varepsilon_i, t, t_{i0})}{\partial t} = m \frac{e^{-\beta\varepsilon_i} k_i(\varepsilon_i, t, t_{i0})}{Z_t} \quad (\text{B3})$$

$$Z_t = \sum_{j=1}^t e^{-\beta\varepsilon_j} k_j(\varepsilon_j, t, t_{j0}) \quad (\text{B4})$$

$$k_{\varepsilon_i}(t, t_{i0}) = m \left( \frac{t}{t_{i0}} \right)^{f(\varepsilon_i)} \quad (\text{B5})$$

$$\frac{1}{z} = \int d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 - f(\varepsilon)} \quad (\text{B7})$$

$$e^{-\beta\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Z_t \rangle}{mt} = z \quad (\text{B8})$$

$$f(\varepsilon_i) = \frac{mte^{-\beta\varepsilon_i}}{Z_t} = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad (\text{B9})$$

$$I(\beta, \mu) = \int d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} = 1 \quad (\text{B10})$$

# 適応度モデル (導出)

G. Bianconi, A.-L. Barabasi(2001)より

リンク生成確率

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod (k_i) = \frac{m \eta_i k_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j k_j} \quad (1)$$

次数 $k$ は時刻 $t$ のべき乗で表されると仮定

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)} \quad (2)$$

(1)式の分母を集団平均で近似

$$\sum_j \eta_j k_j \cong \int d\eta \eta \rho(\eta) \int_1^t dt_0 k_{\eta}(t, t_0) \cong cmt \quad (3)$$

$$\left( c = \int \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} \rho(\eta) d\eta \right) \quad (4)$$

(3)式を(1)式に代入して

$$\frac{\partial k_{\eta}}{\partial t} = \frac{\eta k_{\eta}}{ct} \quad (5)$$

(2), (4)式が同時に成立するため必要条件

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{c} \quad (6)$$

時刻 $t$ で次数 $k$ 以上となる頂点の確率分布

$$P[k_{\eta}(t) > k] = P\left[ t_0 < t \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \right] \cong t \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \quad (7)$$

時刻 $t$ で次数 $k$ となる頂点の確率分布

$$\begin{aligned} p(k) &= - \int \frac{\partial P(k_{\eta}(t) > k)}{\partial k} \rho(\eta) d\eta \\ &= \int \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \frac{ct}{\eta k} \rho(\eta) d\eta \propto k^{-\frac{c}{\eta}-1} \quad (8) \end{aligned}$$

$k_i$  ノード  $i$  の次数     $\rho(\eta)$  適応度の確率分布  
 $t_i$  ノード  $i$  の生成時刻     $\eta_i$  ノード  $i$  の適応度  
 $m$  ノードの追加の際の生成リンク数



# スケールフリー性の証明

G. Bianconi, A.-L. Barabasi (2001) より

## 部分性の仮説から全体則を導く

リンク獲得確率

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = m \prod (k_i) = \frac{m \eta_i k_i}{\sum_{j=1}^n \eta_j k_j} \quad (1)$$

次数  $k$  は時刻  $t$  のべき乗で表されると仮定

$$k_{\eta_i}(t, t_0) = m \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\beta(\eta_i)} \quad (2)$$

(1) 式の分母を集団平均で近似

$$\sum_j \eta_j k_j \cong \int d\eta \eta \rho(\eta) \int_1^t dt_0 k_{\eta}(t, t_0) \cong cmt \quad (3)$$

$$\left( c = \int \frac{\eta}{1 - \beta(\eta)} \rho(\eta) d\eta \right) \quad (4)$$

(3) 式を (1) 式に代入して

$$\frac{\partial k_i}{\partial t}$$

**全体を整合させる個の決定モデル**

(2), (4) 式が同時に成立するため必要条件

$$\beta(\eta) = \frac{\eta}{c} \quad (6)$$

時刻  $t$  で次数  $k$  以上となる頂点の確率分布

$$P[k_{\eta}(t) > k] = P\left[ t_0 < t \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \right] \cong t \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \quad (7)$$

時刻  $t$  で次数  $k$  となる頂点の確率分布

$$p(k) = - \int \frac{\partial P(k_{\eta}(t) > k)}{\partial k} \rho(\eta) d\eta = \int \left( \frac{m}{k} \right)^{c/\eta} \frac{ct}{\eta k} \rho(\eta) d\eta \propto k^{-\frac{c}{\eta}-1} \quad (8)$$

スケールフリー  
( $\rho(\eta)$  の分布)

$k_i$  ノード  $i$  の次数     $\rho(\eta)$  適応度の確率分布

## 2.4.1 スモールワールドモデル

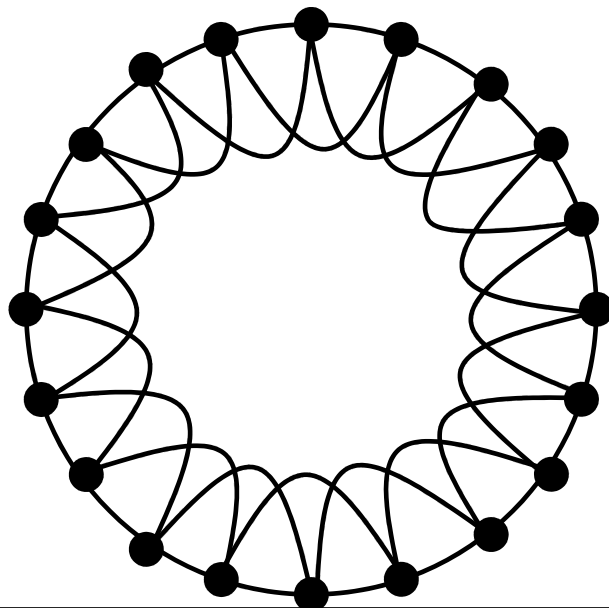
D.J.Watts, S. H. Strogatz: Collective dynamics of 'small-world' networks, Nature, Vol.393, pp. 440-442, 1998

### 現実ネットワークとの対比

- ・ 小さい平均距離  $L$
- ・ 大きいクラスタリング係数  $C$   $\longleftrightarrow$  ・ 次数分布のベキ則は実現なし
- ・ 大きすぎない平均次数  $k$

### スモールワールド・ネットワークの形成

- ・ 全ノード数  $n$
- ・ 両隣  $k/2$  コのノードとリンク
- ・ 全リンク数  $kn/2$



割合  $p$  の枝をランダムにつなぎかえ

1.  $pkn/2$  本をランダムに選ぶ
2. 片方の頂点を切り離す (確率  $1/2$ )
3. 新しいつなぎ先をランダムに選ぶ

