第4章　ゲーム理論の基礎

奥野正寛:ミクロ経済学, 東京大学出版会, 2008.

ミクロ経済学勉強会　2012/7/1

本章のキーワード

- 戦略型ゲーム
- 展開型ゲーム
- ナッシュ均衡
- サブゲーム完全均衡
- フォーク定理

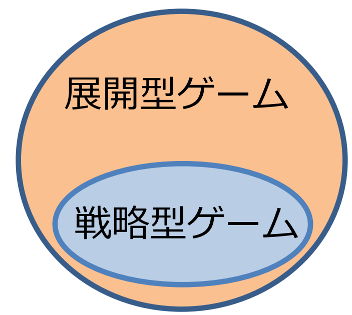
1 ゲーム理論とは

- 戦略的環境のもとでどう行動するのかを明らかにする（主に均衡状態を探す）研究分野.
  - 静的交通量配分: Rosenthal(1973),Yang et al.(2007)
  - 動的交通量配分：Iryo(2010)
  - ロードプライシング： Sandhorn(2001)
  - 歩行者：Asano and Iryo(2010),北川(2009)
    - ゲーム理論合宿2008HP参照

- 戦略的環境：自分が取るべき戦略が，相手の戦略をどう予想するかにより変化する環境

1 協力ゲームと非協力ゲーム

- 協力ゲーム
  - 制度的に拘束力のある合意（提携）を結べる
- **非協力ゲーム**
  - プレイヤーが提携しない．暗黙の了解はしても良い．



- ゲームの表現形式
  - 戦略型ゲーム
    - プレイヤー，戦略，利得の3要素で表現．利得表が用いられる
    - 2人以上のプレイヤーが同時に戦略を決定
  - 展開型ゲーム
    - ゲームの木を用いてグラフ形式で表現
    - プレイヤーが交互に戦略を決める時間概念も考えることが可能

2 戦略型ゲームの例

- 囚人のジレンマ
  - プレイヤーA,Bが戦略C（協調）,D（裏切り）を取れる
  - 利得表は

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略C	戦略D
戦略C	$1,1$	$-l, 1+g$
戦略D	$1+g, -l$	$0,0$

$(g, l > 0, g - l < 1)$

gとlは、(D,C)と(C,D)を交互に選ぶより(C,C)を2回選ぶほうが各人の得る利得が高くなるように設定.つまり

(C,D) < (C,C) and (D,C) < (C,C)

$(1+g)+(-l) < 1*2$

$\rightarrow g - l < 1$

  - 他のプレイヤーが選ぶ戦略は不明
  - 自分の利得が他人の戦略に依存する
    - 戦略的相互依存という

2 戦略型ゲームの例

- 囚人のジレンマ
  - プレイヤーA,Bが戦略C（協調）,D（裏切り）を取れる
  - 利得表は

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略C	戦略D
戦略C	1,1	$-2,2$
戦略D	$2,-2$	0,0

$(g = 1, l = 2)$

gとlは、(D,C)と(C,D)を交互に選ぶより(C,C)を2回選ぶほうが各人の得る利得が高くなるように設定.つまり

(C,D) < (C,C) and (D,C) < (C,C)

$$(1+1)+(-2) < 1*2$$
$$\rightarrow 1-2 < 1$$

  - 他のプレイヤーが選ぶ戦略は不明
  - 自分の利得が他人の戦略に依存する
    - 戦略的相互依存という

2 ジレンマゲームの利得の条件

- $g, l > 0$が成り立たない

プレイヤーB

プレイヤーA	戦略C	戦略D
戦略C	$2,2$	$0,3$
戦略D	$3,0$	$0,0$

C,Dどちらも取りうるため
ジレンマにならない
→カルネアデスの舟板

- $g - l < 1$が成り立たない

プレイヤーB

プレイヤーA	戦略C	戦略D
戦略C	$1,1$	$-1,4$
戦略D	$4,-1$	$0,0$

全体の利益を最善にする選
択が（C,C）ではなくなる.
ジレンマとはいえない

「個々が利益を追求した行動を取ると全体の利益が損なわれる場合がある」のがジレンマ

2-1 ゲームの仮定と支配戦略

- 合理性の仮定
  - ゲームの構造を熟知しており，他者の戦略に対して自分の利得を最大化する戦略を決められる
  - 各プレイヤーが合理的であるという共有知識を持つ
- **支配戦略**とは
  - 相手が何をとっても自分が得になる戦略．無い時もある
  - 互いに支配戦略を取り合った状態が**支配戦略均衡**

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略C	戦略D
戦略C	1,1	−2,2
戦略D	2, −2	0,0

支配戦略均衡

Aについて，
BがCを取るときはD
BがDを取るときもD
の方が利得が高い．
よってDが支配戦略．
Bについても同様．

2-2 ナッシュ均衡

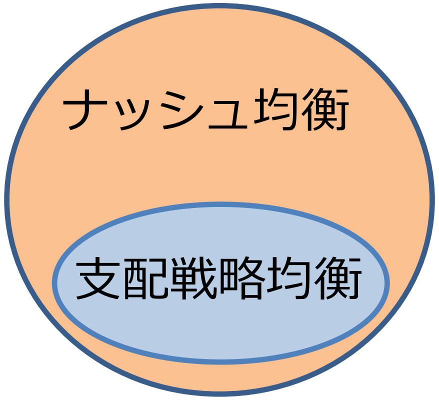
- 支配戦略が存在しない場合（下図プレイヤーB）
- ナッシュ均衡
  - 全プレイヤーにとって**最適反応**となる戦略の組
  - 支配戦略均衡は全てナッシュ均衡．逆は真でない
  - 戦略を変えるインセンティブがない（自己拘束的）
- **最適反応**
  - 他者のある戦略に対し，自分の利得を最大化する戦略を取ること

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略L	戦略R
戦略U	−1,1	−1,0
戦略D	0,−1	0,0

ナッシュ均衡



2-2 パレート最適とは

- 相手の利得を下げずに自分の利得を高めることを**パレート的改善**と呼ぶ。パレート的改善が不可能な場合を**パレート最適解**と呼ぶ。
  - 囚人のジレンマでは（C,C）（C,D）（D,C）.
- パレート最適解は社会として望ましいが、ナッシュ均衡ではない場合実現が難しい。

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略C	戦略D
戦略C	1,1	−2,2
戦略D	2, −2	0,0

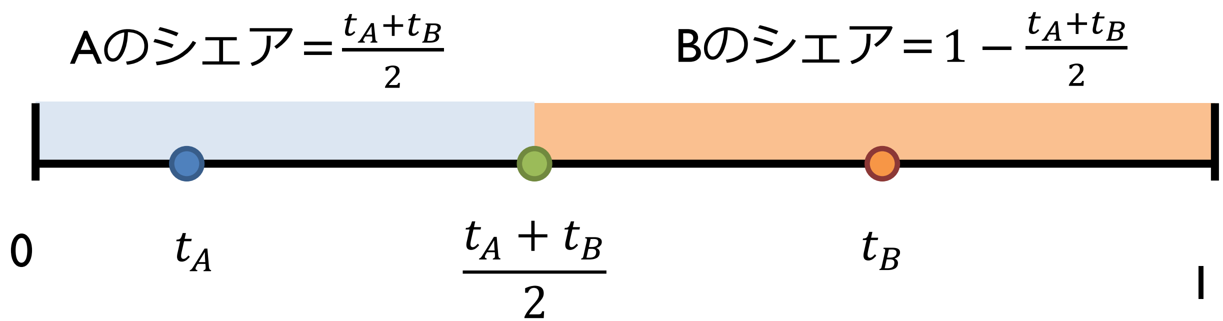
パレート最適解

ナッシュ均衡

パレート的改善
（0,0）→（1,1）

2-3 例：ホテリングゲーム

- 一次元の海水浴場にかき氷屋A,Bがt_A, t_Bに出店
  - 顧客は一様分布し，近い店に行く.
  - 同一地点にA,Bが立地する($t_A = t_B$)とシェアは共に0.5



- ナッシュ均衡は$t_A = t_B = 0.5$のとき
  - t_Aについて$t_B \neq 0.5$のときは最適反応が存在しない
  - $t_A = t_B \neq 0.5$では中心側に移動したほうが利得増加
  - 3者だとナッシュ均衡は無い.
  - 4者だと2者ずつ0.25,0.75に立地するのがナッシュ均衡

2-4 例：レフェリーと口約束

- ナッシュ均衡が2つある場合
  - スイーツかチキン，どちらかに一緒に行く．意見が割れると行かないことになり，利得は二人共0になる
  - 両性の争いと呼ばれる

男性

女性	スイーツ	チキン
スイーツ	2,1	0,0
チキン	0,0	1,2

ナッシュ均衡

  - 共通の知人が2人の前でスイーツを薦めたため，（スイーツ，スイーツ）という口約束が共有知識に
  - 互いに相手はスイーツに行くと予想するようになるので，この約束が自己拘束的になる

2-4 例：シェリング・ポイント

- 同様の問題で，そもそも女性を立てるべきだという社会規範（＝共有知識）がある場合は，男性はスイーツを選択する

男性

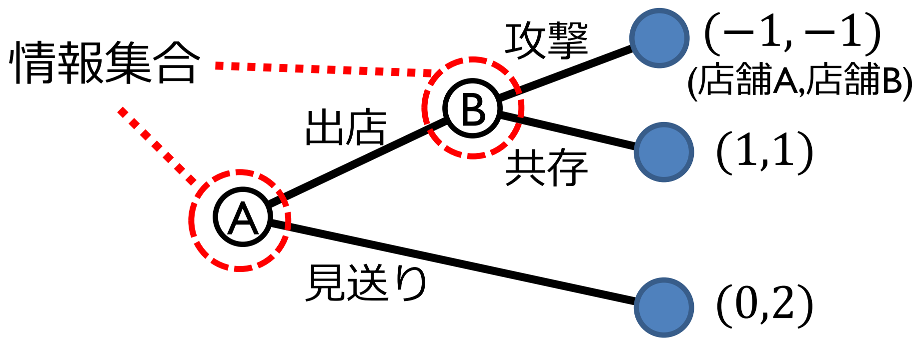
女性		スイーツ	チキン
	スイーツ	2,1	0,0
	チキン	0,0	1,2

女性に望ましい
ナッシュ均衡

- プレイヤーが共通してもっともらしいと考える解を，シェリングポイントという

3 展開型ゲーム

- 戦略型ゲームとの違い
  – 意思決定の順番（時間概念）を考慮できる
- 例：チェーンストアゲーム
  – 店舗Bが既に立地している地域に店舗Aが出店



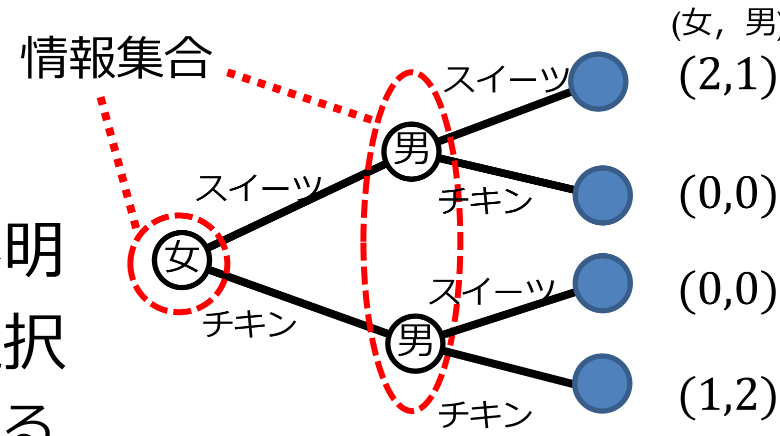
チェーンストアゲームの樹

Aが出店を決めた後，Bが攻撃か共存かを選択するという順番

- **情報集合**
  – 同一プレイヤーが存在する節で，区別できない集合
  – 全ての節はただ１つの情報集合に含まれる

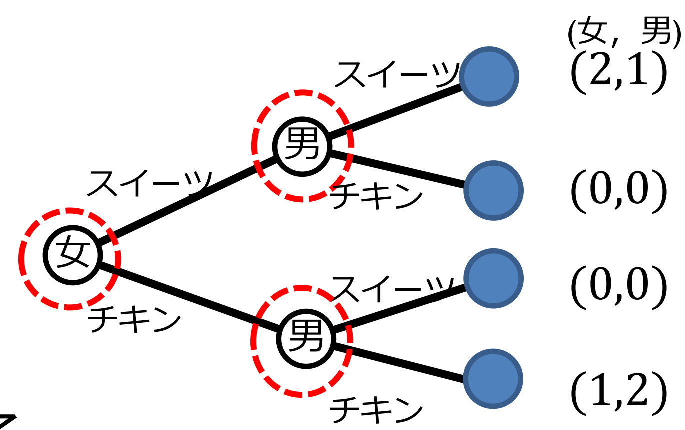
3-1 同時手番ゲーム(静学ゲーム)

- 両性の争い（既出）
  - 男女が同時に意思決定
  - 男性はどちらの節にいるか不明
  - 同一情報集合内では同一の選択
    - 各情報集合における選択を調べる



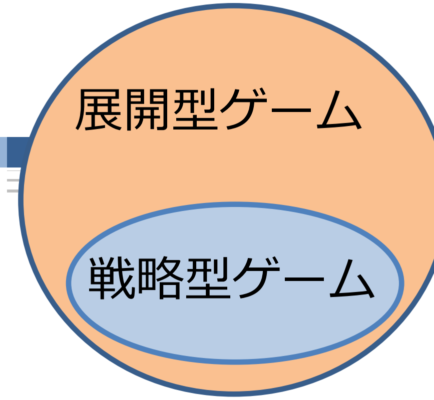
両性の争い

- 女性先導，男性追従
  - 女性の選択結果を男性が知る
  - 動学ゲーム（同時手番ではない）
  - 男性はどちらの節にいるか分かる



女性先導，男性追従

3-2 展開型ゲームの均衡



- ナッシュ均衡
  - 展開型ゲームを戦略ゲームで表す
  - この利得表からは展開型ゲームを一意に構成できない

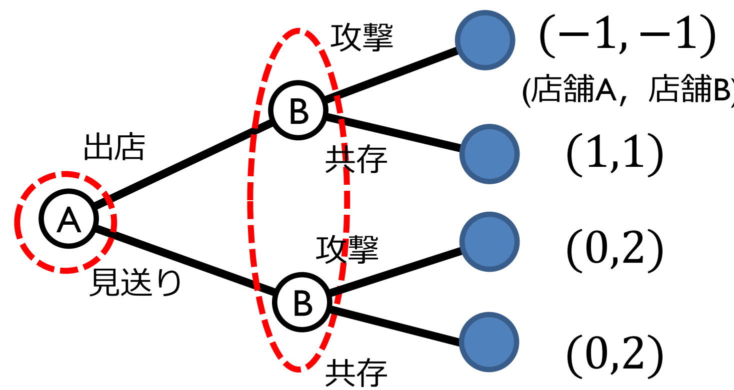
店舗B

店舗A

	攻撃	共存
出店	−1, −1	1,1
見送り	0,2	0,2

ナッシュ均衡は2つ

この場合も利得表は左図と同じ

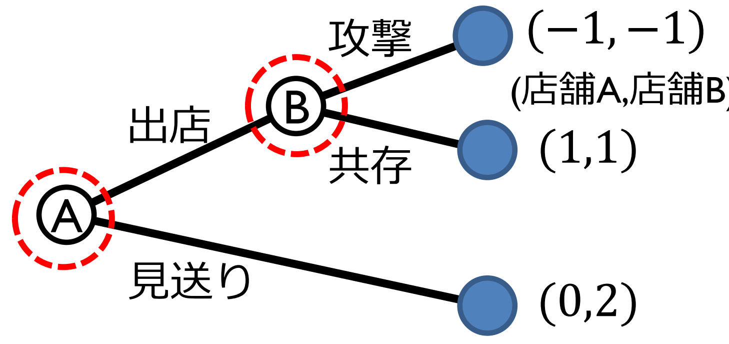


  - 展開型ゲームのナッシュ均衡は，展開型ゲームから構成される戦略型ゲームのナッシュ均衡のこと

3-2 均衡の妥当性

- ナッシュ均衡は妥当か？

店舗A ＼ 店舗B	攻撃	共存
出店	−1, −1	1,1
見送り	0,2	0,2

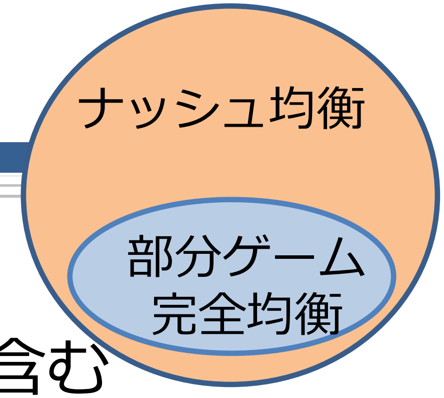


チェーンストアゲームの樹

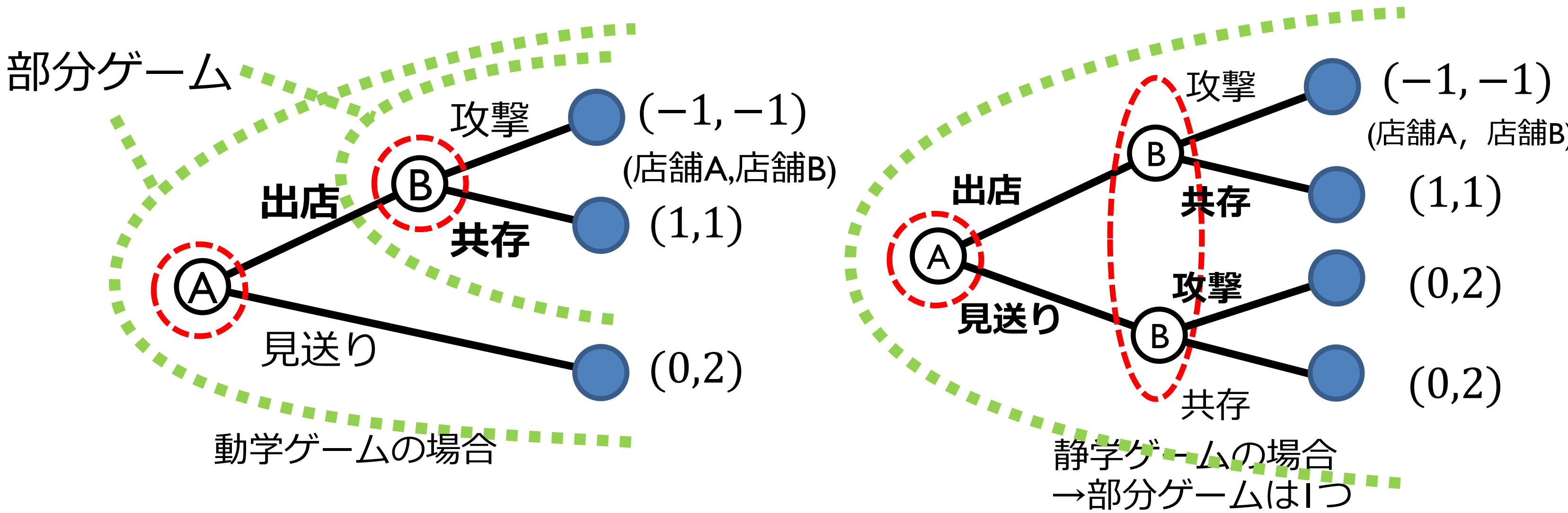
  – (見送り，出店)は、店舗Bが攻撃する構えを見せることで店舗Aの出店を牽制している状態と考えられる
  – だが実際にAが出店した後はBは共存したほうが得策
  – Bの攻撃という選択には信憑性がない→**カラ脅し**という

- 動学ゲームにおいてはナッシュ均衡は適切な解概念ではない！→**部分ゲーム完全均衡**

3-3 部分ゲーム完全均衡



- **部分ゲーム**とは
  - 1つの節から始まり、それ以降の節を全て含む
  - 情報集合は部分ゲームにより分割されない

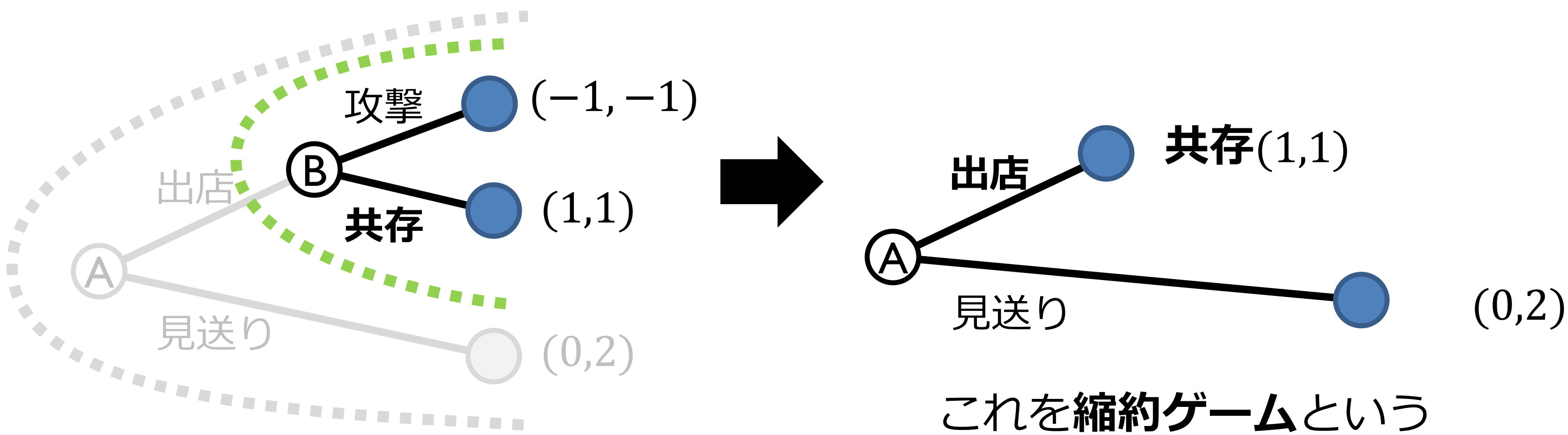


- **部分ゲーム完全均衡**
  - 全ての部分ゲームにおいてナッシュ均衡となる戦略の組

bin
Behavior in Networks
Research Unit

3-3 部分ゲーム完全均衡の解法

- バックワード・インダクション
  - これ以上部分ゲームを含まない最小部分ゲーム内でナッシュ均衡解を探す



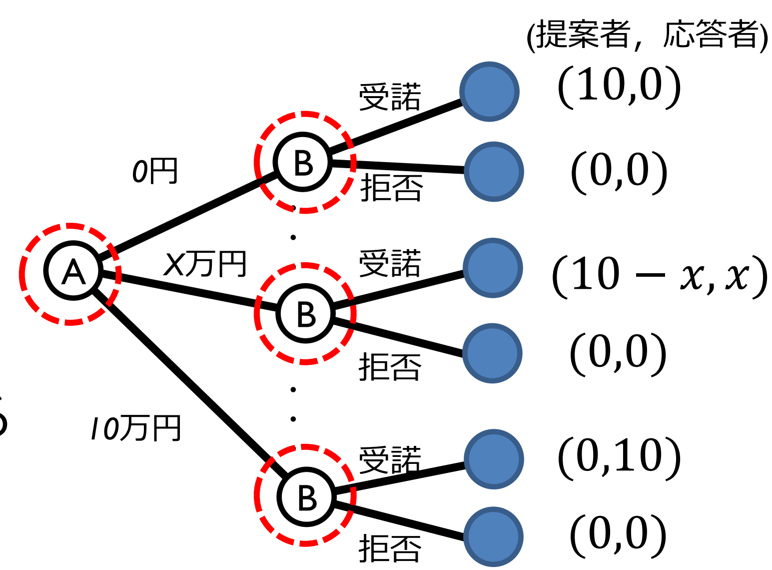
これを**縮約ゲーム**という

  - その解を選択して得られる利得で節を置き換える
  - 縮約ゲーム内のナッシュ均衡は出店することである

3-4 例：最後通牒ゲーム

- 展開型ゲームの応用
  - 提案者Aと応答者Bが10万円を以下のルールで分ける
  - 先に提案者が相手にいくら渡すかを1万きざみで提案
  - 提示額を見て、応答者は受諾か拒否かを表明
  - 受諾は提示額が貰え、拒否は両者とも1円も貰えない

- 部分ゲーム完全均衡
  - 最小単位を提案し受諾
    - 応答者はどんな提案も受諾する
    - 限りなく0に近いか0を提案する



bin Behavior in Networks Research Unit

4-1 展開型ゲーム応用：繰り返しゲーム

- 無限回繰り返しゲーム
  - 例：囚人のジレンマを繰り返すとする
  - 前期の結果を受けて、次期の選択を決める
  - 当期の利得は回数が増えるにつれ割り引かれていく

プレイヤーB

プレイヤーA

	戦略C	戦略D
戦略C	$1,1$	$-l, 1+g$
戦略D	$1+g, -l$	$0,0$

常に（C,C）を取る時のその期の利得
（割引因子δ $=0.9$）

- **割引因子**
  - t期の利得をu_tとすると利得の総和は$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_t$
  - このδ $(0 \leqq \delta < 1)$を**割引因子**という
  - これが小さい＝将来の利得をあまり重視しない

4-1 繰り返しゲームの戦略

- 繰り返しゲームの戦略の例
  - 常にC or Dを取る
  - 奇数回にはCをとり、偶数回にはDを取る
  - それ以前の全ての期で両者がCをとっている場合はC、どちらかがDをとったことがあるとD（トリガー戦略）

- トリガー戦略は一度裏切ったらその後報復をし続けるような戦略である
- 実は1回目にC（協力）を選び、その後はトリガー戦略をとりあうことが部分ゲーム完全均衡となる. これを次で示す

4-2 互いにトリガー戦略をとる状況

1. 過去にどちらかがDを取った場合
   - 相手はDを取り続ける.自分もDを取り続けるのが最適
   - つまりトリガー戦略を辞めるインセンティブがない

2. 過去にCしかとられていない場合
   a. 今期自分がDを取る時の将来利得

   相手は今期はC，次期以降はDを取ると考えられる

$$\underset{(\mathrm{D},\mathrm{C})}{(1+g)} + \underset{(\mathrm{D},\mathrm{D})}{0} \cdot \delta^1 + \underset{(\mathrm{D},\mathrm{D})}{0} \cdot \delta^2 + \cdots = (1+g) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \cdot 0$$

   b. 今期Cを取る時の将来利得

   相手はずっとCを取り続けると考えられる

$$\underset{(\mathrm{C},\mathrm{C})}{1} + \underset{(\mathrm{C},\mathrm{C})}{1} \cdot \delta^1 + \underset{(\mathrm{C},\mathrm{C})}{1} \cdot \delta^2 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot 1$$

4-3 繰り返しゲームの均衡

- トリガー戦略離脱のインセンティブが無い為には

今期Cを選択 $\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot 1 \geqq (1+g) + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \cdot 0$ 今期Dを選択

$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = \frac{1}{1-\delta}$より式変形すると $\delta \geqq \dfrac{g}{1+g}$

割引因子が十分大なら、トリガー戦略が部分ゲーム完全均衡

- **フォーク定理**
  - このようにプレイヤーが将来利得を十分重視するとき、(C,C)の繰り返しが部分ゲーム完全均衡経路となること
  - 1期のみのナッシュ均衡(D,D)の結果と変わった！
- 繰り返しが有限の場合
  - 終わりからバックワードインダクションにより解ける
  - 全段階で(D,D)が取られる→(D,D)繰り返しが均衡経路

まとめ

- 戦略型ゲームと展開型ゲーム
  - 同時意思決定か順番か
- ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡
  - 静的ゲーム（同時手番ゲーム，戦略型ゲーム）はナッシュ均衡
  - 動的ゲーム（展開型ゲーム）は部分ゲーム完全均衡
- 繰り返しゲーム
  - 無限回繰り返しの場合は割引因子を仮定することで、トリガー戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる

参考文献

- Rosenthal, R. W.: The Network Equilibrium Problem in Integers, *Networks*, Vol. 3, pp. 53-59, 1973.
- Yang, H., Zhang, X. and Meng, Q.: Stackelberg game and multiple equilibrium behaviors on networks, Transportation Research B, Vol.41, pp.841-861, 2007.
- Sandholm, W. H.: Evolutionary Implementation and Congestion Pricing, The Review of economic studies Vol.69, pp.667-689, 2001.
- Iryo, T., On the Existence of Pure Nash Equilibrium in Dynamic Traffic Assignments, in New Developments in Transport Planning: Advances in Dynamic Transport Assignment, C. M. J. Tampere, F. Viti, and L. H. Immers (Eds.), 2010, Edward Elgar Publishing：Massachusetts, p.73-87.
- Asano, M., Iryo, T., and Kuwahara, M., Microscopic Pedestrian Simulation Model Combined with a Tactical Model for Route Choice Behaviour, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, **18**(6), 2010: p. 842-855.