効用最大化に基づく
離散選択モデルの基礎

愛媛大学
倉内慎也

モデルの種類(1)
～決定論的モデルと確率論的モデル～

- 決定論的モデル

  F＝ma

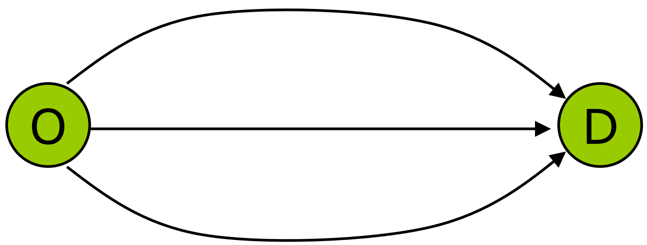
- 確率論的モデル

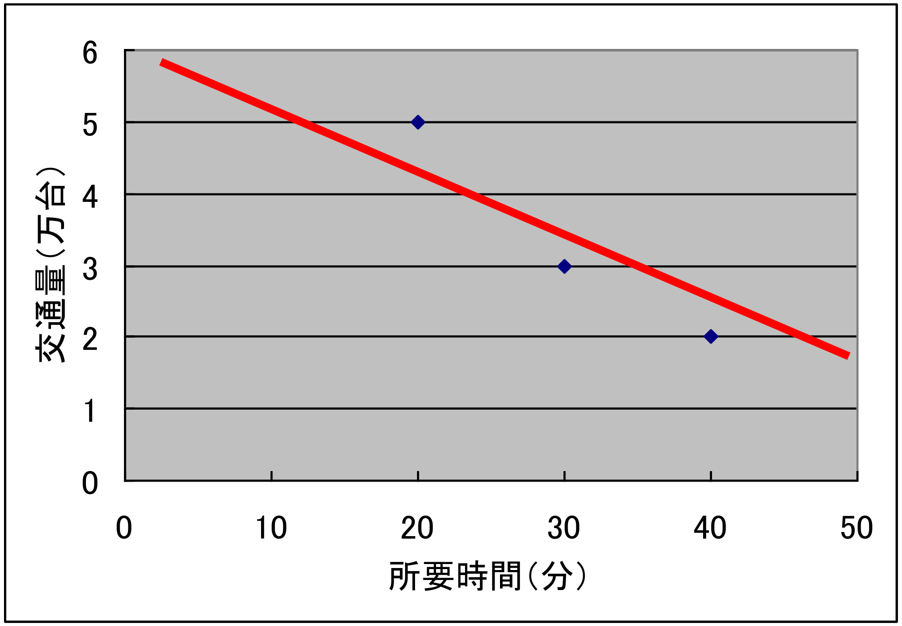
  ビールの売上げ＝f(宣伝広告費，気温など)＋**ε**

<u>*我々が扱うのは交通現象→確率モデル*</u>

モデルの種類(2)
～集計モデルと非集計モデル～

集計モデル

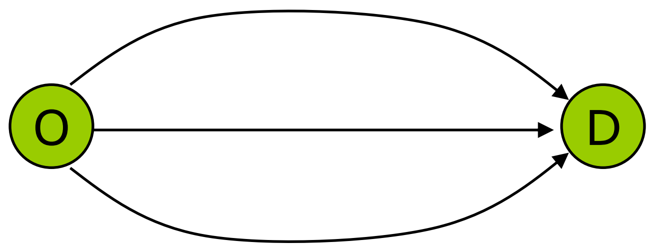




交通量＝f(所要時間)+ε

モデルの種類(2) ～集計モデルと非集計モデル～

非集計モデル



	個人属性		所要時間(分)			選択結果
	性別	年齢	経路1	経路2	経路3	
Aさん	男性	25	20	30	40	経路1
Bさん	女性	38	30	25	35	経路2
Cさん	男性	62	25	40	45	経路1

選択経路＝g(所要時間, 個人属性)+ε

集計化

交通量

モデルの種類(3)
～連続量のモデルと離散量のモデル～

- 連続量のモデル
  回帰モデル：例）自動車の走行距離

- 離散量のモデル
  ロジットモデル：例）ブランドの選択，携帯電話会社

交通分野での選択肢は離散量が多い
→離散選択モデル

いつ？	出発時刻選択
どこへ？	目的地選択
どの交通手段で？	交通手段選択
どの経路で？	経路選択
どれぐらいの頻度で？	トリップ頻度の選択

今日の主題

- 交通現象の分析や交通需要予測を行なうモデルとして，非集計離散選択モデルを扱う
  - *決定論的モデル vs. 確率モデル*
  - *集計モデル vs. 非集計モデル*
  - *連続量のモデル vs. 離散量のモデル*

- そのうち，ランダム効用最大化に基づく非集計離散選択モデル，を説明する

合理的選択と効用最大化

合理的選択

完備性：*{車, 鉄道}→（車≧鉄道）and/or（鉄道≧車）*

推移性：*（車＞バス）&（バス＞鉄道）⇔（車＞鉄道）*

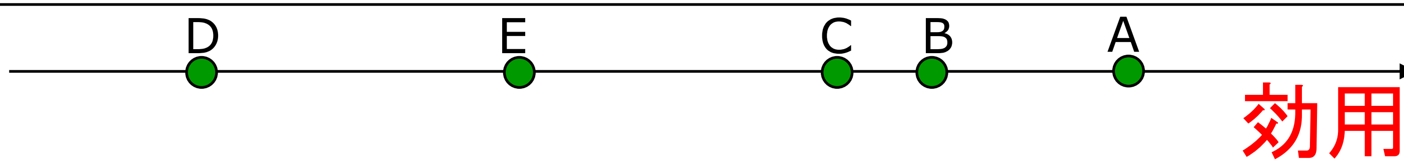
複数の選択肢を選好（望ましさ）の順に並べることができる

例）{A,B,C,D,E}

(A>B), (B>C), (C>D), (D<E), (C>E)

↓

(A>B>C>E>D)



効用最大化：「人は最大の効用を与える選択肢を選ぶ」

Aさん：車を選択⇔U（車）＞U（バス）, U（鉄道）

ランダム効用(1)

効用を構成する要因　(例)交通手段選択

- 代替案の属性：料金，所要時間，乗換え回数etc.
- 個人属性：性別，年齢，免許の有無etc.
- トリップ属性：トリップ目的，時間帯etc.

$$U(car) = \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * \mathrm{cost}_{car} + \beta_5 * carown + \varepsilon_{car}$$

$$U(bus) = \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * \mathrm{cost}_{bus} + \beta_6 * age60 + \varepsilon_{bus}$$

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \mathrm{cost}_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

確定項(V)　　誤差項

分析者にとって意思決定者のもつ真の効用は不明

→ランダム(誤差)項を用いて効用を確率的に表す

ランダム効用(2)

<u>誤差項に含まれるもの</u>

- 非観測属性：快適性，移動の自由度etc.
- 測定誤差：駅までのアクセス時間etc.
- 情報の不完全性：認知所要時間と実際の所要時間のずれetc.
- Instrumental (proxy) variables:

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \mathrm{cost}_{rail} + \beta_5 * conf_{rail}$$

$$conf_{rail} = \beta_5' * \underline{seat_{rail}} + \nu$$

***conf*の代理変数**

$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \mathrm{cost}_{rail} + \beta_5'' * seat_{rail} \underbrace{+ \beta_5 * \nu}_{\varepsilon}$$

ランダム効用(3)

<u>誤差項に含まれるもの</u>

- 非観測異質性：快適性，移動の自由度etc.

$$U(rail) = \beta_n * time_{rail}$$
$$\beta_n = \bar{\beta} + \underline{\nu_n}$$

観測不可能な嗜好の異質性

$$U(rail) = \bar{\beta} * time_{rail} + \underbrace{\nu_n * time_{rail}}_{\varepsilon}$$

$$U(rail) = \beta_n * time_{rail}$$
$$\beta_n = \underline{\alpha * income_n} + \nu_n$$

観測可能な嗜好の異質性

$$U(rail) = (\alpha * income_n) * time_{rail} + \underbrace{\nu_n * time_{rail}}_{\varepsilon}$$

- 効用最大化以外の意思決定ルールによる影響：

$$U(car) = \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * cost_{car} + \beta_5 * carown + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * cost_{bus} + \beta_6 * age60 + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * cost_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

誤差項の分布とモデル(1)

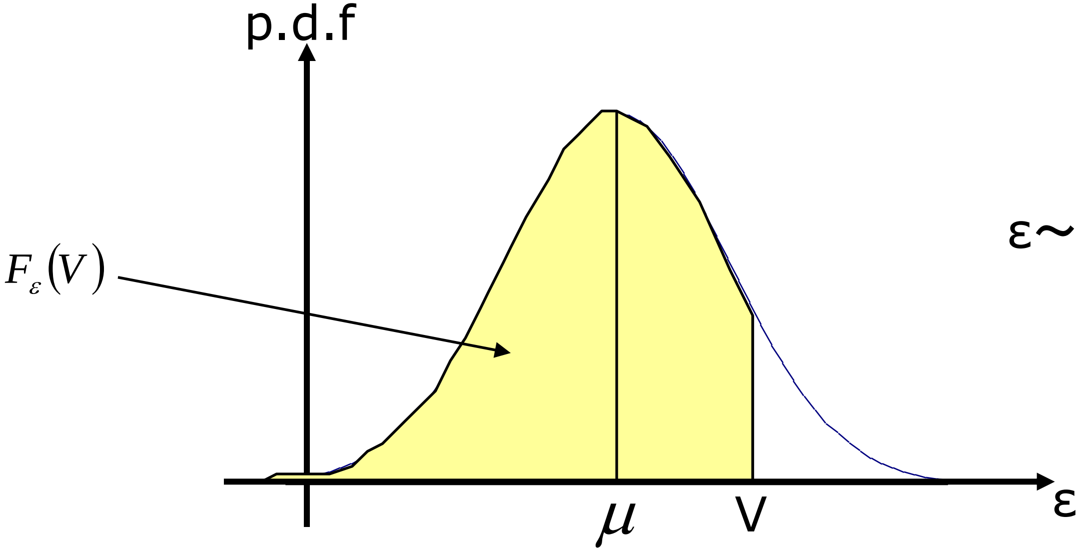
$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

誤差項は確率的に変動
→分析者から見て効用が最大となる選択肢は確率的
→分析者から見た意思決定者の選択行動は確率的

$$\begin{aligned} choice = car &\Leftrightarrow U(car) > U(rail) \\ &\Leftrightarrow V_{car} + \varepsilon_{car} > V_{rail} + \varepsilon_{rail} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_{rail} - \varepsilon_{car} < V_{car} - V_{rail} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon < V \end{aligned}$$

誤差項の分布とモデル(2)

$$\Pr ob(choice = car) = \Pr ob(\varepsilon < V)$$
$$= F_\varepsilon(V)$$



ε~ $N(\mu, \sigma^2)$

選択確率はεとVに依存

誤差項の分布とモデル(3)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

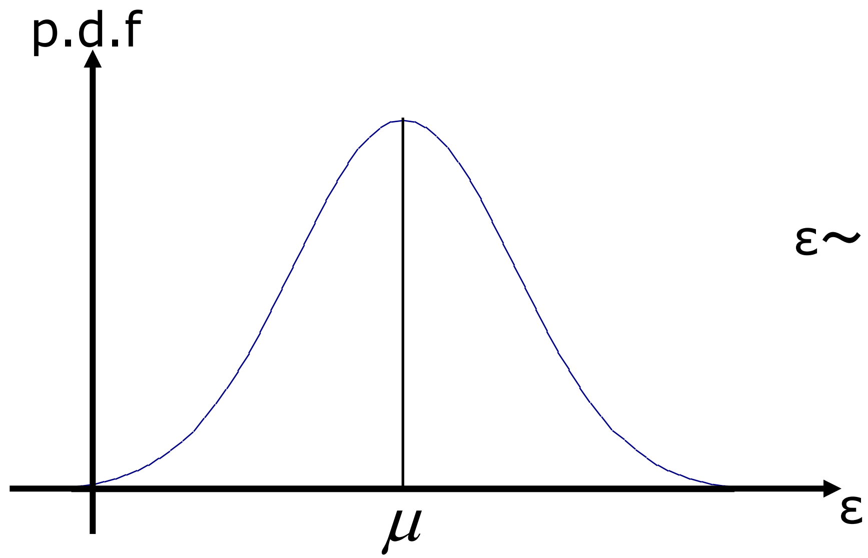
εの分布形は？

ε～IIDガンベル分布	→	多項ロジットモデル
ε～一般化極値(GEV)分布	→	GEVモデル (NL,PCL,CNL,GNL等)
ε～多変量正規分布	→	多項プロビットモデル
ε～ GEVと正規分布などの合成分布	→	ミックストロジットモデル

多項プロビットモデル（MNP）モデル（1）

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布



ε～ $N(\mu, \sigma^2)$

εが非常に多くの要因を含む
→中心極限定理より分布の正規性は意味あり

多項プロビット（MNP）モデル（2）

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$\begin{aligned} U(car) &= \beta X_{car} + \theta_{car}\varepsilon_{delay} + \varepsilon_{car,other} \\ U(bus) &= \beta X_{bus} + \theta_{bus}\varepsilon_{delay} + \omega_{bus}\varepsilon_{access} + \varepsilon_{bus,other} \\ U(rail) &= \beta X_{rail} + \omega_{rail}\varepsilon_{access} + \varepsilon_{rail,other} \end{aligned}$$

Cov(U)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma^2_{car} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma^2_{rail} \end{bmatrix}$$

εは互いに分散が異なり相関も持つ
→多変量正規分布は最も一般的

多項プロビット(MNP)モデル(3)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$

$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \Sigma^{-1} \varepsilon' \right)$$

- Open-formのため計算コストが高い
- Identificationの問題から推定可能なパラメータは限られており解釈が困難

多項ロジット(MNL)モデル(1)

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$

$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$

ε～IIDガンベル分布

$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

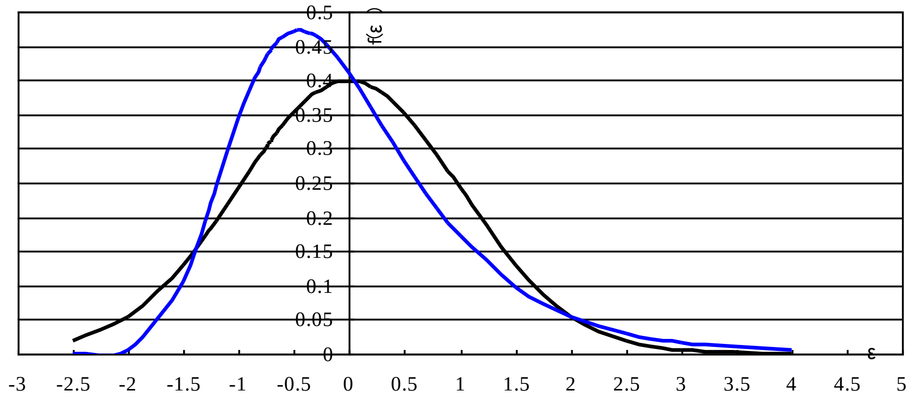


図2.1　正規分布とガンベル分布の確率密度関数

正規分布に似ている
→特に2項ロジットモデルは2項プロビットモデルとほとんど同じ

多項ロジット（MNL）モデル（2）

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε〜IIDガンベル分布

$$\boxed{P(car) = \frac{\exp(\mu V(car))}{\exp(\mu V(car)) + \exp(\mu V(bus)) + \exp(\mu V(rail))}}$$

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

Cov(U)

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

- シェア型モデルであるため直感的にわかりやすい
- closed-formのため計算コストが安い

ロジットモデルとIIA特性

- 無関係な選択肢からの選択確率の独立（Independence from Irrelevant Alternatives）

$$P(i|C)=\frac{\exp(V_i)}{\sum_{j\in C}\exp(V_j)}$$

$$\frac{P(i|C)}{P(j|C)}=\frac{\exp(V_i)}{\exp(V_j)}=\frac{P(i|A)}{P(j|A)} \qquad i,j\in A\subseteq C$$

$$P(car):P(bus)=2:1,P(bus):P(rail)=1:1$$

$$\Updownarrow$$

$$P(car)=\frac{1}{2},P(bus)=\frac{1}{4},P(rail)=\frac{1}{4}$$

IIA特性の利点

- 選択肢の全集合を考える必要がないため調査設計が楽(一対比較を考えればよい)

- 選択肢の部分集合を用いて推定してもパラメータ推定値にバイアスが生じない
  →推定計算が楽(選択肢集合が大きい/不確定な場合)
  例)ゾーン数400の目的地選択
  実際に選択した目的地+残り399の中から9個をランダムサンプリングして推定

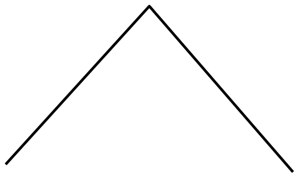
- 代替案の追加や削除が容易
  →新規代替案の影響評価などが簡単

IIA特性の問題点(1)
～赤バス/青バス問題～

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$

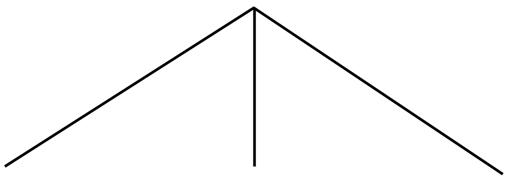
$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$

Before



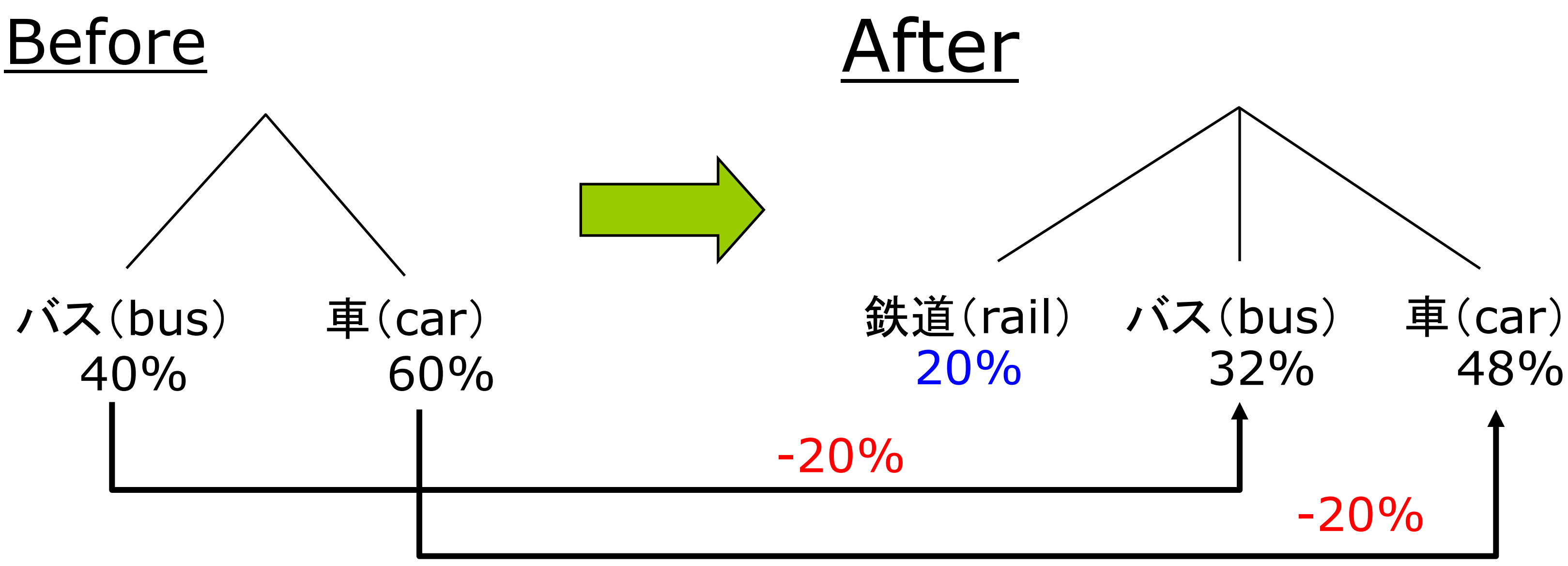
赤バス(RB)	車(car)
1/2	1/2

After



	赤バス(RB)	青バス(BB)	車(car)
	1/4	1/4	1/2
ロジットモデル	1/3	1/3	1/3

IIA特性の問題点(2)



交差弾性値が等しい

IIA特性を避けるには？

- 効用関数の確定項をより良く特定化する
  - ・説明変数を加える
  - ・異質性を考慮

Before

バス（bus）	車（car）	
20%	80%	セグメント1
60%	40%	セグメント2
40%	60%	

After

鉄道（rail）	バス（bus）	車（car）
10%	18%	72%
30%	42%	28%
20%	30%	50%
	-25%	-17%

- IIAテストを実行する
- 誤差項の相関構造を考慮したモデルを適用する

ネスティッドロジットモデル(1)

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$

Cov(U)

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

多項ロジットモデルの仮定:ε～IIDガンベル分布

矛盾

ε_{RB}とε_{BB}は共通の非観測属性を含んでいる

- 料金
- 快適性
- 利便性など

$$U(car) = \beta T \boxed{+\alpha\,\mathrm{cost}_{car} + \varepsilon'_{car}} \quad \varepsilon_{car}$$

$$U(RB) = \beta T \boxed{+\alpha\,\mathrm{cost}_{bus} + \varepsilon'_{RB}} \quad \varepsilon_{RB}$$

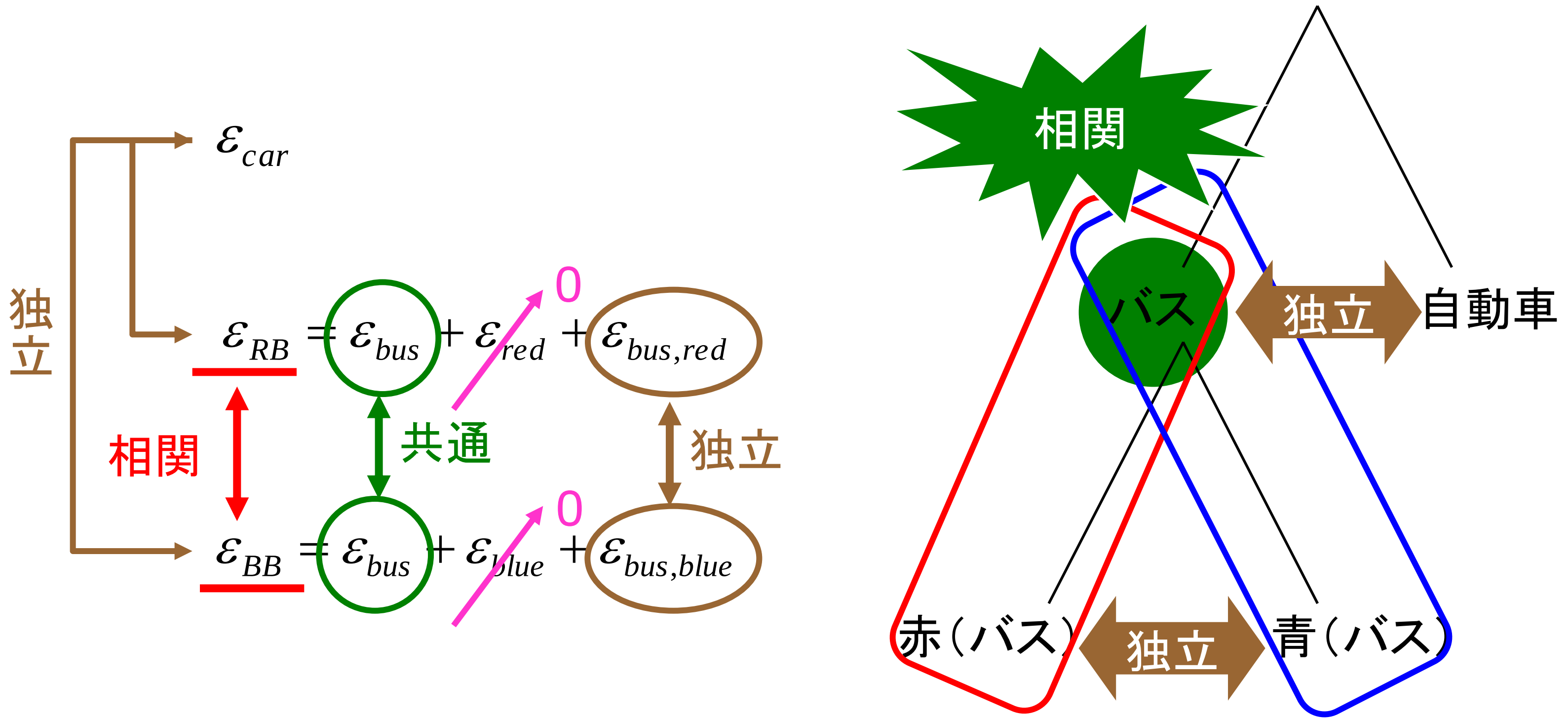
共通要因

相関

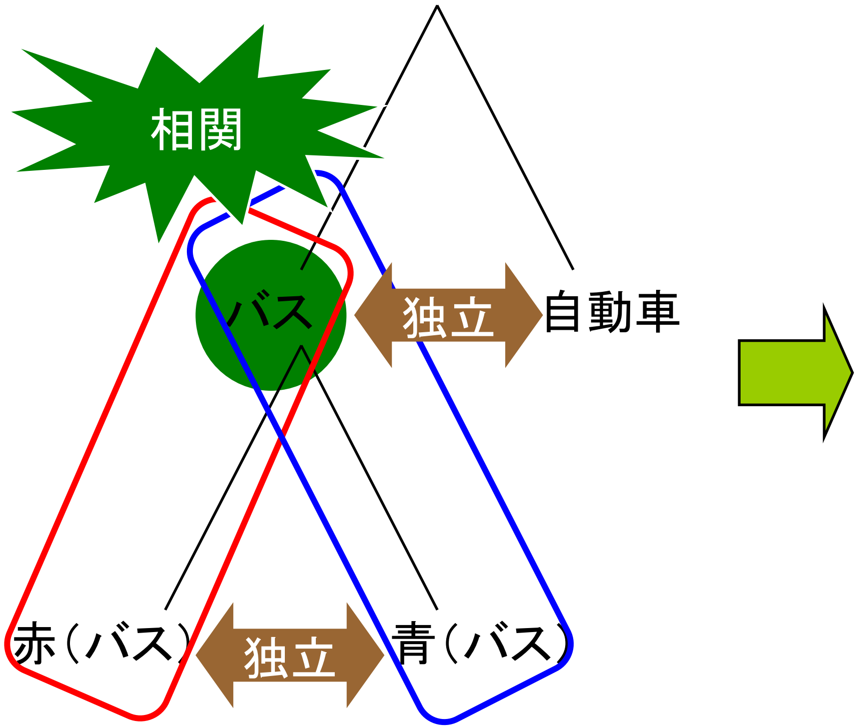
$$U(BB) = \beta T \boxed{+\alpha\,\mathrm{cost}_{bus} + \varepsilon'_{BB}} \quad \varepsilon_{BB}$$

ネスティッドロジットモデル（2）

想定される誤差項の相関構造



ネスティッドロジットモデル(3)



直感的に表すと・・・

Step1
自動車vsバス

↓(バスを選択)

Step2
赤vs青

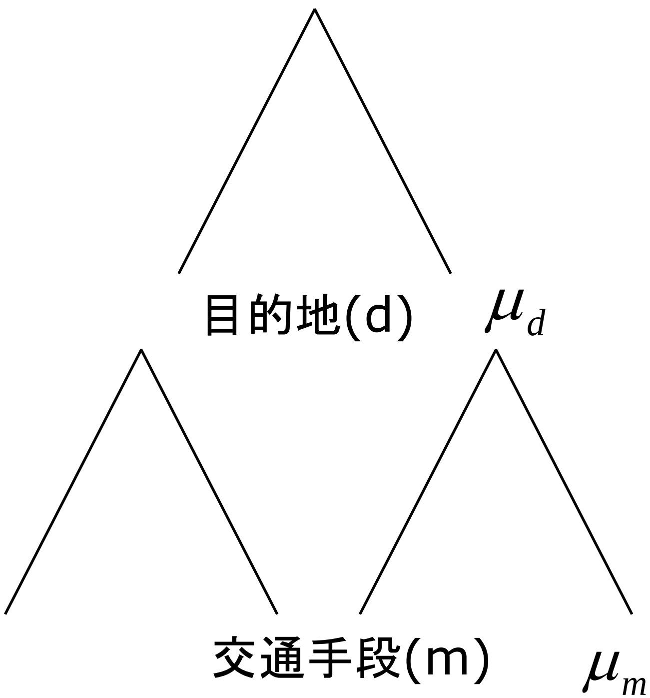
$$P(RB|\{car,RB,BB\})=P(RB|\{bus(RB,BB)\})P(bus|\{car,bus(RB,BB)\})$$

独立
→ロジットモデル

独立
→ロジットモデル

ネスティッドロジットモデル(4)

誤差項の相関構造



$$P(d,m) = P(m|d)P(d)$$

$$= \frac{\exp(\mu_m V_m)}{\sum_{m' \in M} \exp(\mu_m V_{m'})} \times \frac{\exp\{\mu_d (V_d + V'_d)\}}{\sum_{d' \in D} \exp\{\mu_d (V_{d'} + V'_{d'})\}}$$

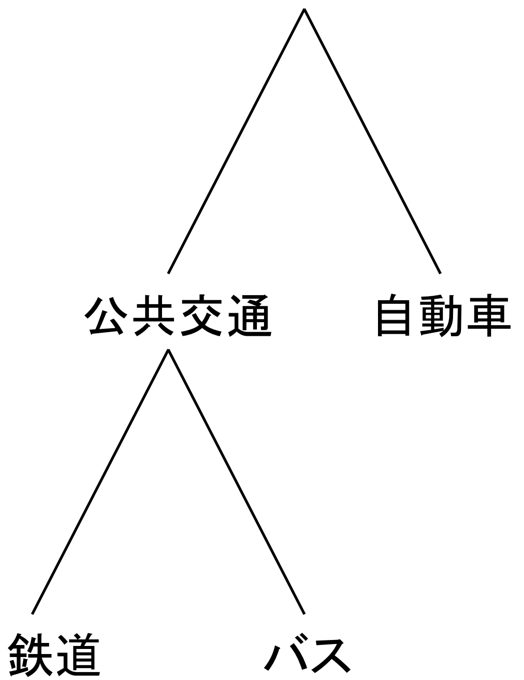
$$V'_d = \frac{1}{\mu_m} \ln \sum_{m'} \exp(\mu_m V_{m'})$$

ログサム変数

目的地dのグループに含まれる交通手段から得られる効用の最大値の期待値

ネスティッドロジットモデル(5)

NLモデルの誤差構造



$\underline{Cov(U)}$

$$\begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma^2_{transit} & 0 \\ \sigma^2_{transit} & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

等分散

無相関

一般的な誤差構造(MNPモデル)

$$\begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} \begin{bmatrix} \sigma^2_{rail} & \sigma_{rail,bus} & \sigma_{rail,car} \\ \sigma_{rail,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,car} \\ \sigma_{rail,car} & \sigma_{bus,car} & \sigma^2_{car} \end{bmatrix}$$

ミックストロジット（MXL）モデル（1）

プロビットモデルの柔軟な誤差構造

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

ε

ロジットモデルの操作性

プロビットタイプのフレキシブルな誤差項

IIDガンベル分布

$$\begin{array}{cc} \eta & \nu \\ \varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma^2_{car} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma^2_{bus} & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma^2_{rail} \end{bmatrix} + & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ミックストロジット（MXL）モデル（2）

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

ロジットモデルの操作性

IIDガンベル分布

$$\Lambda(car|\eta) = \frac{e^{\beta X_{car}+\eta_{car}}}{e^{\beta X_{car}+\eta_{car}} + e^{\beta X_{bus}+\eta_{bus}} + e^{\beta X_{rail}+\eta_{rail}}}$$

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

ηは*unknown*

ミックストロジット（MXL）モデル（3）

$$P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta$$

open-form→どうやって推定？

<u>シミュレーション法</u>

$$\hat{P}(car) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^{D} \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^{d}}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^{d}} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}^{d}} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}^{d}}}$$

Step1:　分布f(η)に従う乱数ηを発生
Step2:　それを用いて選択確率を計算
Step3:　これをD回繰り返し選択確率の平均値を計算
Step4:　それを尤度として最尤推定法により未知パラメータを推定

ミックストロジット（MXL）モデル（4）

プロビットモデルの柔軟な誤差構造

$$U_{car} = \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}$$

プロビットタイプのフレキシブルな誤差項

ηの与え方によりあらゆるRUMモデルが近似可能
McFadden and Train (2000)

ミックストロジット（MXL）モデル（5）

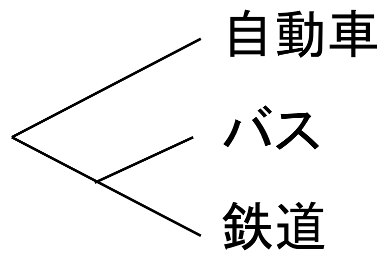
Nested

$$U_{car} = \beta X_{car} + \nu_{car}$$

$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{bus}$$

$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail}$$

$$\eta_{transit} \approx N(0,1)$$



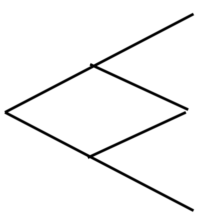
$$\begin{array}{ccccc} \eta & & \nu & & \varepsilon \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} \end{bmatrix} \end{array}$$

NLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MXL)モデル(6)

Cross-Nested

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail}$$



$$\eta_{transit}, \eta_{road} \approx N(0,1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \eta & & \nu & & \varepsilon \\ \begin{bmatrix} \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} \end{bmatrix} \end{array}$$

CNLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MXL)モデル(7)

その他1:空間的な相関

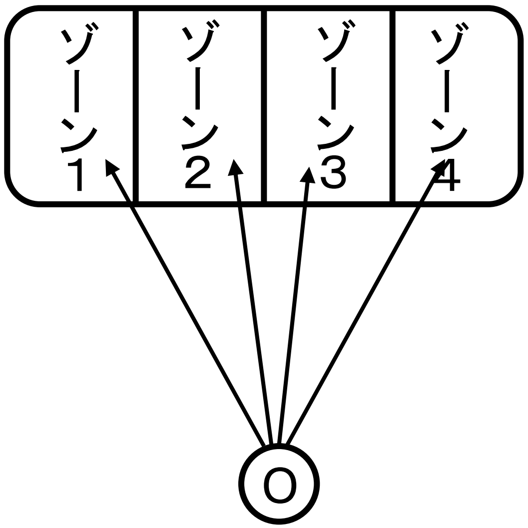
$$U_{zone1} = \beta X_{zone1} + \sigma_0 \eta_1 + \nu_{zone1}$$

$$U_{zone2} = \beta X_{zone2} + \sigma_0 \eta_1 + \sigma_0 \eta_2 + \nu_{zone2}$$

$$U_{zone3} = \beta X_{zone3} + \sigma_0 \eta_2 + \sigma_0 \eta_3 + \nu_{zone3}$$

$$U_{zone4} = \beta X_{zone4} + \sigma_0 \eta_3 + \nu_{zone4}$$

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3 \approx N(0,1)$$

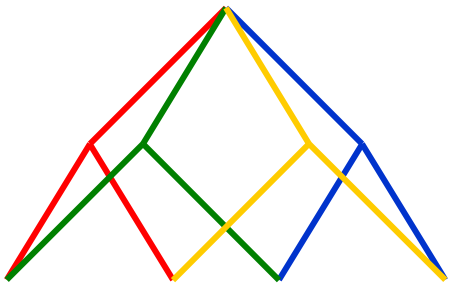


$$\begin{array}{ccccc} \eta & & \nu & & \varepsilon \\ \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\ \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 & 0 \\ \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_0^2 & 2\sigma_0^2+\sigma^2 & \sigma_0^2 \\ 0 & 0 & \sigma_0^2 & \sigma_0^2+\sigma^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ミックストロジット（MXL）モデル（8）

その他2：ネットワーク型（複合選択）

$$
\begin{aligned}
U_{car,p} &= \beta X_{car,p} + \sigma_{car}\eta_{car} + \sigma_p\eta_p + \nu_{car,p} \\
U_{car,op} &= \beta X_{car,op} + \sigma_{car}\eta_{car} + \sigma_{op}\eta_{op} + \nu_{car,op} \\
U_{bus,p} &= \beta X_{bus,p} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \sigma_p\eta_p + \nu_{bus,p} \\
U_{bus,op} &= \beta X_{bus,op} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \sigma_{op}\eta_{op} + \nu_{bus,op}
\end{aligned}
$$



$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_p, \eta_{op} \approx N(0,1)$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\eta & & \nu & & \varepsilon \\
\begin{bmatrix}
\sigma_{car}^2+\sigma_p^2 & \sigma_{car}^2 & \sigma_p^2 & 0 \\
\sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2+\sigma_{op}^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\
\sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2+\sigma_p^2 & \sigma_{bus}^2 \\
0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2+\sigma_{op}^2
\end{bmatrix}
& + &
\begin{bmatrix}
\sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sigma^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sigma^2
\end{bmatrix}
& = &
\begin{bmatrix}
\sigma_{car}^2+\sigma_p^2+\sigma^2 & \sigma_{car}^2 & \sigma_p^2 & 0 \\
\sigma_{car}^2 & \sigma_{car}^2+\sigma_{op}^2+\sigma^2 & 0 & \sigma_{op}^2 \\
\sigma_p^2 & 0 & \sigma_{bus}^2+\sigma_p^2+\sigma^2 & \sigma_{bus}^2 \\
0 & \sigma_{op}^2 & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus}^2+\sigma_{op}^2+\sigma^2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ミックストロジット（MXL）モデル（9）

異分散

$$U_{car} = \beta X_{car} + \sigma_{car}\eta_{car} + \nu_{car}$$
$$U_{bus} = \beta X_{bus} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \nu_{bus}$$
$$U_{rail} = \beta X_{rail} + \sigma_{rail}\eta_{rail} + \nu_{rail}$$

> Identificationの問題で，一つのσは0に固定する必要あり

$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_{rail} \approx N(0,1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \eta & & \nu & & \varepsilon \\ \begin{bmatrix} \sigma_{car}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \sigma_{car}^2 + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{bus}^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rail}^2 + \sigma^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

ミックストロジット（MXL）モデル（10）

嗜好の異質性：ランダム係数モデル（1）

$$U_{car,n} = \beta T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

βは母集団で同一⇔
嗜好は母集団で同質と仮定

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

嗜好には異質性（個人差）が存在

観測異質性　　非観測異質性

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \alpha_1 * male_n + \beta_1 T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性の定数項：α_0　男性の定数項：$\alpha_0 + \alpha_1$

$$U_{car,n} = \alpha_0 + \beta_1 * male_n * T_{car,n} + \beta_2 * (1 - male_n) * T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}$$

女性のパラメータ：β_2　男性のパラメータ：β_1

$$U_{car,n}^{Group1} = \alpha_0^{Group1} + \beta_1^{Group1} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group1}$$

Group1のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group1}, \beta_1^{Group1})$

$$U_{car,n}^{Group2} = \alpha_0^{Group2} + \beta_1^{Group2} T_{car,n} + \varepsilon_{car,n}^{Group2}$$

Group2のパラメータベクトル：$(\alpha_0^{Group2}, \beta_1^{Group2})$

アプリオリ・マーケット
ト
セグメンテーション

ミックストロジット（MXL）モデル（11）

嗜好の異質性：ランダム係数モデル（2）

$$U_{car,n} = \beta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$

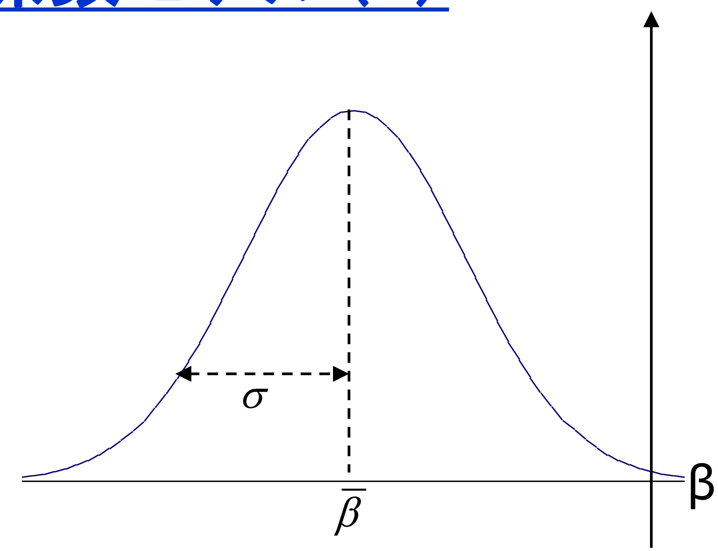
$$\beta_n \approx N\left(\bar{\beta}, \sigma^2\right)$$

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \sigma \eta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$

$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \sigma \eta_n T_{bus,n} + \nu_{bus,n}$$

$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \sigma \eta_n T_{rail,n} + \nu_{rail,n}$$

IIDガンベル分布



$\eta_n \approx N(0,1)$ $\quad \bar{\beta}, \sigma : unknown\ parameter$

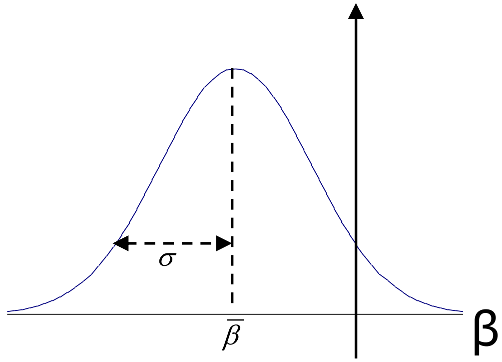
$\bar{\beta}_n = \gamma_0 + \gamma_1 income_n$ としても良い

観測異質性と非観測異質性の両方を考慮

ミックストロジット（MXL）モデル（12）

嗜好の異質性：ランダム係数モデル（3）

$$U_{car,n} = \bar{\beta} T_{car,n} + \eta_n T_{car,n} + \nu_{car,n}$$
$$U_{bus,n} = \bar{\beta} T_{bus,n} + \eta_n T_{bus,n} + \nu_{bus,n}$$
$$U_{rail,n} = \bar{\beta} T_{rail,n} + \eta_n T_{rail,n} + \nu_{rail,n}$$



ηの分布型：正規分布は非現実的な値をとる

三角分布，切断正規分布，対数正規分布，レーリー分布など

νの分布型：任意の分布が適用できる

IIDガンベル ：Logit Kernel

GEV ：GEV Kernel（ NL,CNL+ランダム係数）

RUM（Random Utility Maximization）モデル

$$U_{in} = V_{in}(X_{in};\beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

$$Choice_n = D_n(U_{in})$$

確定項の関数型
線形効用関数？

説明変数
客観的確定変数？

嗜好
母集団で同一？
ランダムに分布？

誤差構造

選択肢集合
確定的？所与？

意思決定ルール
効用最大化？

効用の不変性
社会的相互作用
選択問題のフレーミング