行動モデルの基礎理論

愛媛大学
倉内慎也
kurauchi@cee.ehime-u.ac.jp

はじめに

- 行動は選択の帰結
- 行動のモデル化≒選択のモデル化
- 選択の種類
  - 連続量の選択　例）ある場所での滞在時間
  - 離散量の選択　例）交通手段，目的地，経路
- 離散量の選択を表すモデルとして，主にランダム効用最大化に基づく非集計離散選択モデル，を説明する

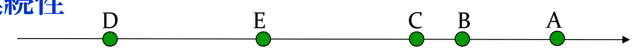
合理的選択と効用最大化

合理的選択
再帰性/完全性：*{車，鉄道}→（車≧鉄道）and/or（鉄道≧車）*
推移性：*（車＞バス）&（バス＞鉄道）⇔（車＞鉄道）*

複数の選択肢を選好（望ましさ）の順に並べることができる

例）{A,B,C,D,E}
(A>B), (B>C), (C>D), (D<E), (C>E)　再帰性/完全性
推移性
(A>B>C>E>D)

連続性



効用最大化：「人は最大の効用を与える選択肢を選ぶ」
Aさん：車を選択⇔U（車）＞U（バス），U（鉄道）

制約条件下での最適化行動

移動を含む行動の実行：有限な資源（時間，お金など）が不可欠
⇒ 制約条件下での最適化行動

個人nの行動代替案x_{jn}の組み合わせ

Max. $U_n = f\left(\boxed{x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn}}\right)$

Subject to $g_{kn}\left(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn}, \boxed{p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kJ}}\right) = E_{kn}$ $(k = 1,2, \dots, K)$

資源kに対する行動代替案x_{jn}の単位消費量　資源kの総量

例）1週間の行動スケジューリング
- x_{jn}：自由活動j（買い物，娯楽，在宅）の活動時間
- E_{1n}：1週間の自由活動時間　$p_{1j} = 1$
- E_{2n}：1週間で利用可能な予算　p_{2j}：活動jの単位時間当たりの費用

制約条件下での最適化行動

個人nの行動代替案x_{jn}の組み合わせ

Max. $U_n = f(\boxed{x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn}})$

Subject to $g_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn}, \boxed{p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kJ}}) = E_{kn} \quad (k = 1,2,\dots,K)$

資源kに対する行動代替案x_{jn}の単位消費量　資源kの総量

ラグランジュの未定乗数法を用いてx_{jn}について解くと

個人nの行動代替案x_{jn}の最適消費量

$$x^*_{jn} = x_{jn}\left(p_{11}\dots, p_{1J}, \dots, p_{K1}\dots, p_{KJ}, E_{1n}\dots, E_{Kn}\right)$$ 需要関数

- 制約条件を観測するのは困難
- タイム・ウインドウは？

制約条件下での最適化行動

Max. $U_n = f(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn})$ 直接効用関数

Subject to $g_{kn}(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{Jn}, p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kJ}) = E_{kn} \quad (k = 1,2,\dots,K)$

$$x^*_{jn} = x_{jn}\left(p_{11}\dots, p_{1J}, \dots, p_{K1}\dots, p_{KJ}, E_{1n}\dots, E_{Kn}\right)$$

$$U^*_n = f(x^*_{1n}, \dots, x^*_{Jn})$$ 間接効用関数

$$= Y\left(p_{11}\dots, p_{1J}, \dots, p_{K1}\dots, p_{KJ}, E_{1n}\dots, E_{Kn}\right)$$

制約条件やタイムウインドウを直接的に考慮しなくてよい

多くの場合，間接効用関数を考える

ランダム効用

効用を構成する要因 (例)交通手段選択

- 代替案の属性：料金，所要時間，乗換え回数etc.
- 個人属性：性別，年齢，免許の有無etc.
- トリップ属性：トリップ目的，時間帯etc.

$$\begin{aligned}
U(car) &= \beta_1 + \beta_3 * time_{car} + \beta_4 * \cos t_{car} + \beta_5 * carown + \varepsilon_{car} \\
U(bus) &= \beta_2 + \beta_3 * time_{bus} + \beta_4 * \cos t_{bus} + \beta_6 * age60 + \varepsilon_{bus} \\
U(rail) &= \beta_3 * time_{rail} + \beta_4 * \cos t_{rail} + \varepsilon_{rail}
\end{aligned}$$

確定項(V)　誤差項

分析者にとって意思決定者のもつ真の効用は不明

→ランダム(誤差)項を用いて効用を確率的に表す

ランダム効用(2)

誤差項に含まれるもの

- 非観測属性：快適性，移動の自由度etc.
- 測定誤差：駅までのアクセス時間etc.
- 情報の不完全性：認知所要時間と実際の所要時間のずれetc.
- Instrumental (proxy) variables：「快適性」の代わりに「座席数」を代理変数として用いたときの差異etc.
- 異質性：所要時間や費用の重み(効用パラメータ)の個人差etc.
- 効用最大化以外の意思決定ルールによる影響：所要時間や費用の重み(効用パラメータ)の個人差etc.

RUM（Random Utility Maximization）モデルのフレームワーク

確定項の関数型

説明変数

$$U_{in} = V_{in}(X_{in};\beta_n) + \varepsilon_{in}(\theta_n) \qquad i \in C_n$$

嗜好

$$\delta_n(i) = \begin{cases} 1: & if\ U_{in} > U_{jn}, \quad \forall j(j \neq i) \\ 0: & otherwise \end{cases}$$

誤差構造

効用最大化による選択結果

選択肢集合

誤差項の分布とモデル（1）

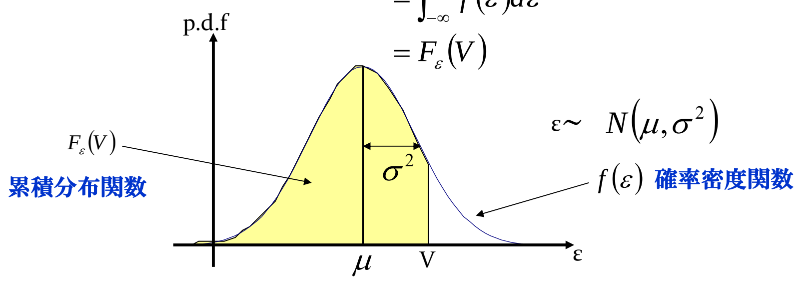
$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{rail}$$

誤差項は確率的に変動
→分析者から見て効用が最大となる選択肢は確率的
→分析者から見た意思決定者の選択行動は確率的

$$\begin{aligned} choice = car &\Leftrightarrow U(car) > U(rail) \\ &\Leftrightarrow V_{car} + \varepsilon_{car} > V_{rail} + \varepsilon_{rail} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon_{rail} - \varepsilon_{car} < V_{car} - V_{rail} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon < V \end{aligned}$$

誤差項の分布とモデル（2）

$$\begin{aligned} \Pr ob(choice = car) &= \Pr ob(\varepsilon < V) \\ &= \int_{-\infty}^{V} f(\varepsilon)d\varepsilon \\ &= F_\varepsilon(V) \end{aligned}$$



選択確率はεとVに依存

多項プロビットモデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～多変量正規分布

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rail}^2 & \sigma_{bus,rail} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{bus,rail} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{car,bus} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car}^2 \end{bmatrix}$$

多項プロビットモデル

- 中心極限定理より誤差項の仮定は尤もらしい
- open-formであるため計算負荷が大きい（J-1重積分）

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon)d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Sigma^{-1}\varepsilon'\right)$$

多項ロジットモデル

$$U(car) = \beta X_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = \beta X_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = \beta X_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

ε～IIDガンベル
独立で(Independently)
同一(Identically)の分散を持つ
分布(Distributed)

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

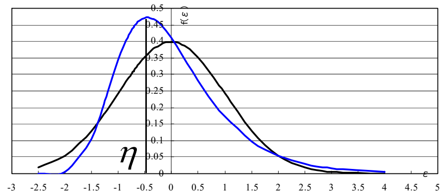


図2.1　正規分布とガンベル分布の確率密度関数

$$V(\varepsilon) = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2}$$

$$f(\varepsilon) = \mu \exp\{-\mu(\varepsilon - \eta)\} \cdot \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon - \eta)\}]$$
$$\mathrm{F}(\varepsilon) = \exp[-\exp\{-\mu(\varepsilon - \eta)\}]$$

多項ロジットモデルと多項プロビットモデル

$$U(car) = V_{car} + \varepsilon_{car}$$
$$U(bus) = V_{bus} + \varepsilon_{bus}$$
$$U(rail) = V_{rail} + \varepsilon_{bus}$$

多項ロジットモデル

- closed-formであるため計算が容易
- 便益計算が簡便

$$P(i) = \frac{\exp(\mu V_i)}{\sum_{j \in C} \exp(\mu V_j)}$$

多項プロビットモデル

- 中心極限定理より誤差項の仮定は尤もらしい
- open-formであるため計算負荷が大きい(J-1重積分)

$$P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon \Sigma^{-1} \varepsilon'\right)$$

ロジットモデルとIIA特性

- 無関係な選択肢からの選択確率の独立　(Independence from Irrelevant Alternatives)

$$\underbrace{\boxed{\underbrace{\boxed{car, bus, rail,}}_{C} walk, bike}}_{A}$$

$$P(car|C) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail})}$$

$$P(car|A) = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{car}) + \exp(V_{bus}) + \exp(V_{rail}) + \exp(V_{walk}) + \exp(V_{bike})}$$

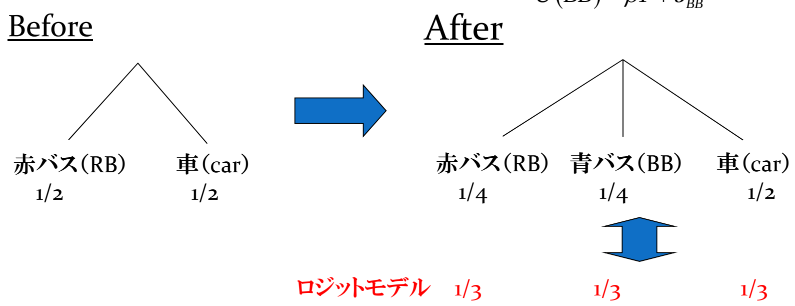
$$\frac{P(car|C)}{P(rail|C)} = \frac{\exp(V_{car})}{\exp(V_{rail})} = \frac{P(car|A)}{P(rail|A)}$$

選択確率の比は無関係な選択肢(*walk,bike*)に影響を受けない

IIA特性の問題点

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$

$$U(car) = \beta T + \varepsilon_{car}$$
$$U(RB) = \beta T + \varepsilon_{RB}$$
$$U(BB) = \beta T + \varepsilon_{BB}$$



ミックストロジット(MMNL)モデル（1）

プロビットモデルの柔軟な誤差構造

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}
\end{aligned}
\quad \varepsilon
$$

ロジットモデルの操作性

プロビットタイプのフレキシブルな誤差項

IIDガンベル分布

$$
\varepsilon = \overset{\eta}{\begin{bmatrix} \sigma_{car}^2 & \sigma_{car,bus} & \sigma_{car,rail} \\ \sigma_{car,bus} & \sigma_{bus}^2 & \sigma_{bus,rail} \\ \sigma_{car,rail} & \sigma_{bus,rail} & \sigma_{rail}^2 \end{bmatrix}} + \overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}
$$

ミックストロジット(MMNL)モデル（2）

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} + \eta_{car} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} + \eta_{bus} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} + \eta_{rail} + \nu_{rail}
\end{aligned}
$$

ロジットモデルの操作性

IIDガンベル分布

$$
\Lambda(car|\eta) = \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}}}
$$

$$
P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta
$$

ηはunknown

ミックストロジット(MMNL)モデル（3）

$$
P(car) = \iiint_{\eta} \Lambda(car|\eta) f(\eta) d\eta
$$

open-form→どうやって推定？

シミュレーション法

$$
\hat{P}(car) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^{D} \frac{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^d}}{e^{\beta X_{car} + \eta_{car}^d} + e^{\beta X_{bus} + \eta_{bus}^d} + e^{\beta X_{rail} + \eta_{rail}^d}}
$$

Step1: 分布f(η)に従う乱数ηを発生
Step2: それを用いて選択確率を計算
Step3: これをD回繰り返し選択確率の平均値を計算
Step4: それを尤度として最尤推定法により未知パラメータを推定

ミックストロジット(MMNL)モデル（4）

Nested

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} + \nu_{rail} \\
\eta_{transit} &\sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

自動車
バス
鉄道

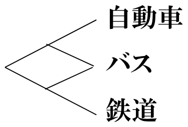
$$
\overset{\eta}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}} + \overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}} = \overset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 & \sigma_{transit}^2 \\ 0 & \sigma_{transit}^2 & \sigma^2 + \sigma_{transit}^2 \end{bmatrix}}
$$

NLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MMNL)モデル（5）

Cross-Nested

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} && + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} + \sigma_{transit}\eta_{transit} && + \sigma_{road}\eta_{road} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} + \sigma_{transit}\eta_{transit} && + \nu_{rail}
\end{aligned}
$$



$$\eta_{transit}, \eta_{road} \sim N(0,1)$$

$$
\overset{\eta}{\begin{bmatrix} \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2_{transit} \end{bmatrix}}
+
\overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}
=
\overset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma^2 + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{road} & 0 \\ \sigma^2_{road} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} + \sigma^2_{road} & \sigma^2_{transit} \\ 0 & \sigma^2_{transit} & \sigma^2 + \sigma^2_{transit} \end{bmatrix}}
$$

CNLモデルとは違う!!

ミックストロジット(MMNL)モデル（6）

異分散

$$
\begin{aligned}
U_{car} &= \beta X_{car} + \sigma_{car}\eta_{car} + \nu_{car} \\
U_{bus} &= \beta X_{bus} + \sigma_{bus}\eta_{bus} + \nu_{bus} \\
U_{rail} &= \beta X_{rail} + \sigma_{rail}\eta_{rail} + \nu_{rail}
\end{aligned}
$$

$$\eta_{car}, \eta_{bus}, \eta_{rail} \sim N(0,1)$$

Identificationの問題で，一つのσは0に固定する必要あり

$$
\overset{\eta}{\begin{bmatrix} \sigma^2_{car} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{bus} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{rail} \end{bmatrix}}
+
\overset{\nu}{\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}}
=
\overset{\varepsilon}{\begin{bmatrix} \sigma^2_{car} + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{bus} + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{rail} + \sigma^2 \end{bmatrix}}
$$

おわりに

- 他にも様々なモデルあり
  - GEVモデル
  - 連続量のモデル
  - 離散-連続モデル
- 他にも様々な行動理論あり
  - 心理学/行動経済学系の概念モデル

土木計画学ハンドブック編集委員会 編
B5判/822頁　本体25,000円＋税
著者割引あり