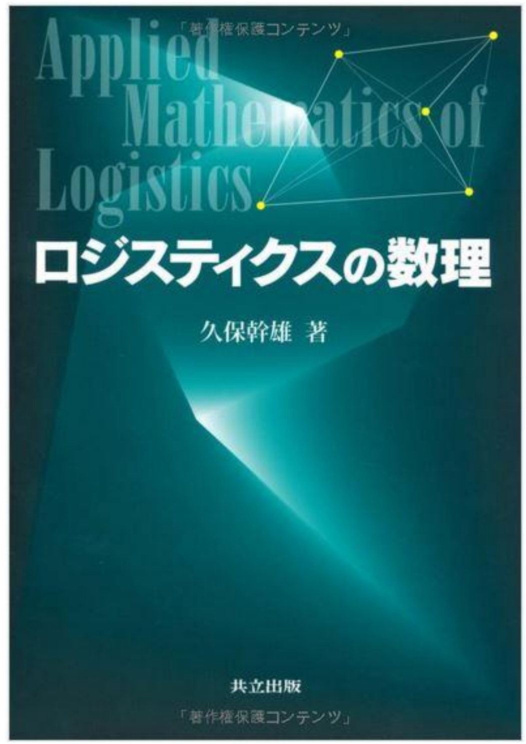
理論輪読会

ロジスティクスの数理　久保幹雄 著



今泉孝章
M2

2014/6/21(Sat)

発表内容

○第1章 箱詰めの数理

-組み合わせ最適化問題に対する
ヒューリスティクスとその解の性能検証

○第2章 施設配置計画

-数理計画問題としての定式化と類似問題への
 ヒューリスティクスの適用

○第3章 経済発注の数理

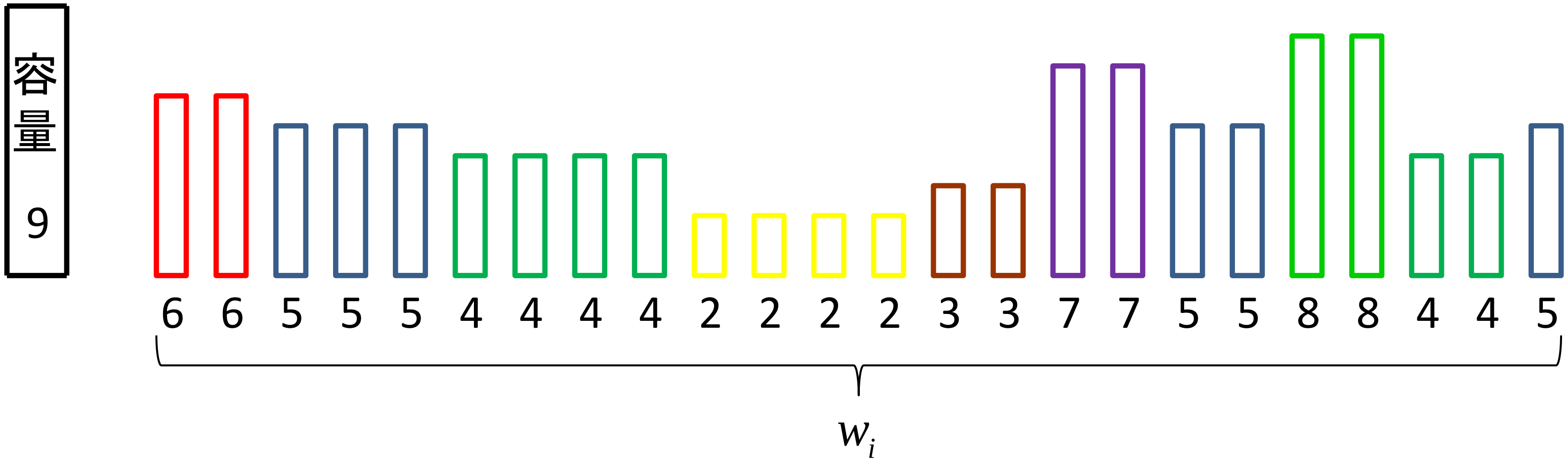
-古典的モデルの導出と拡張

ビンパッキング問題

n 個のアイテムからなる有限集合 N とサイズ B のビンが無限個準備されている. 個々のアイテムの $i \in N$ のサイズ $0 \leq w_i \leq B$ は分かっているものとする. これらの n 個のアイテムを、サイズ B のビンに詰めることを考えるとき, 必要なビンの数を最小にするような詰め方を求めよ

アイテム　$n = 24$

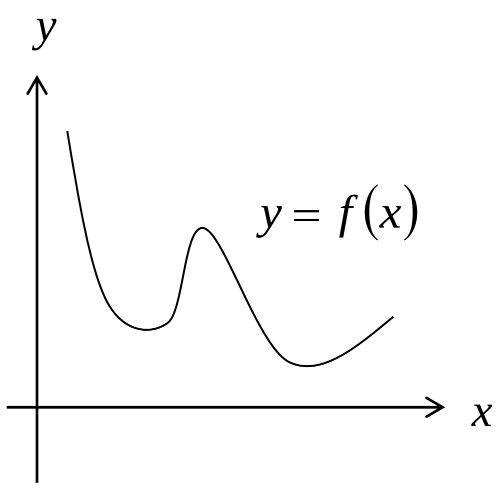
ビン　$B = 9$　　$N = \{6,6,5,5,5,4,4,4,4,2,2,2,2,3,3,7,7,5,5,8,8,4,4,5\}$

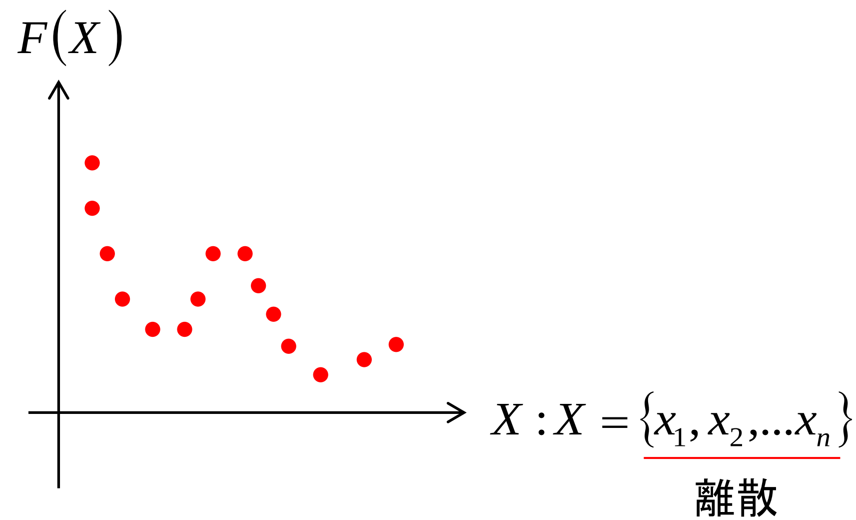


組み合わせ最適化問題

(非形式的)定義

最適化問題の中でも最適解の集合が離散的か, 離散的なものに減らすことができるものであり, 最もよい解決法を見つけることである.





微分によって関数を最小化できる

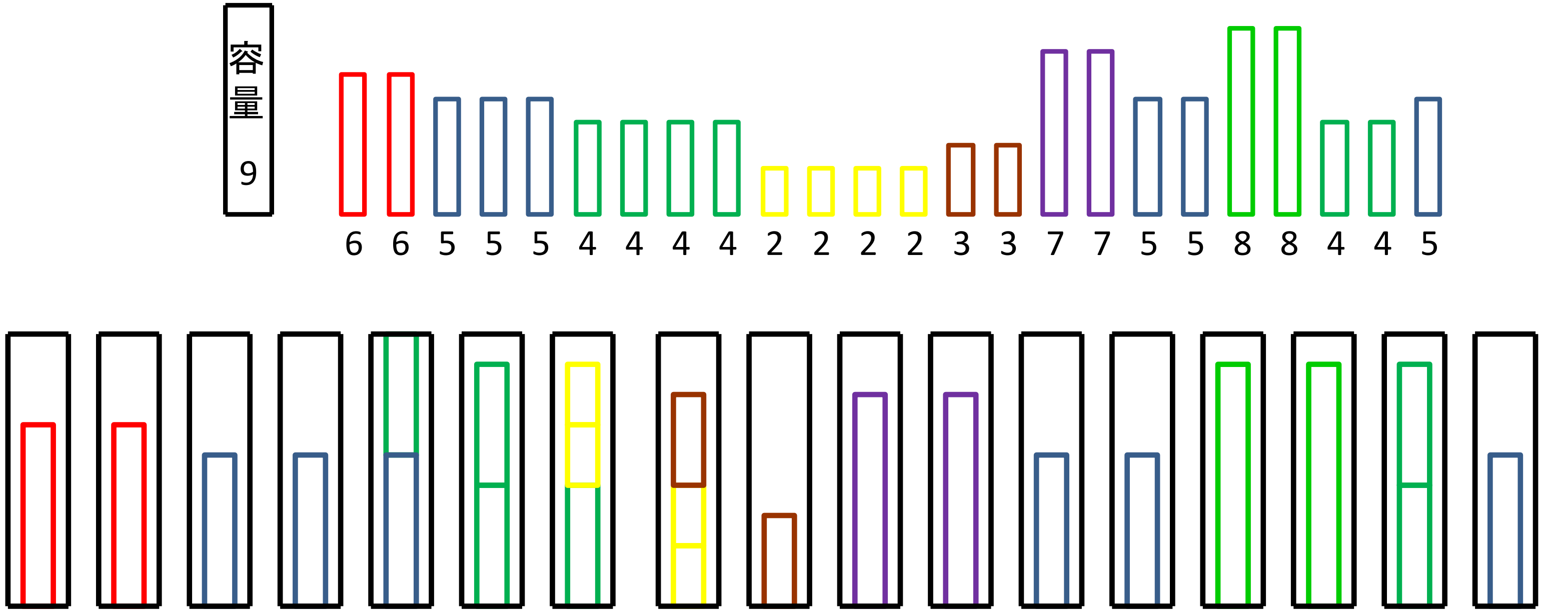
個々の離散変数の組み合わせによって
解が変化する→解も離散的に変化

ビンパッキング問題、巡回セールスマン問題(第6章)のような
組み合わせ最適化問題はNP-困難→効率的に解くことは難しい
近似解法やヒューリスティクス手法が使われる

ヒューリスティクスによる求解

next fit ヒューリスティクス

アイテムを $1,2,\ldots,n$ の順に, ビンに詰めいていく. このとき, アイテムを入れることによってビンのサイズの上限 を超えるようなら,
そのビンを閉じ, 新たなビンを用意する.



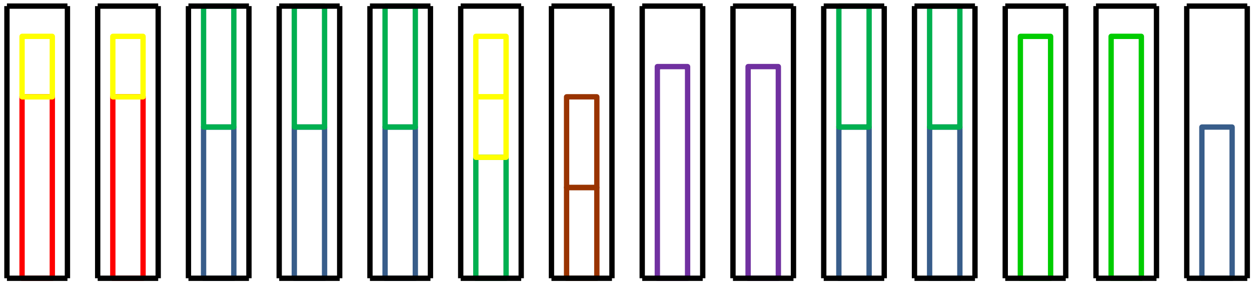
このときの解は17だが....

ヒューリスティクスによる求解

first fit ヒューリスティクス

アイテムを $1,2,\ldots,n$ の順に, ビンに詰めいていく. このとき, アイテムは詰め込み可能な最小添字のビンに詰めるものとする. どのビンに入れてもサイズの上限 B を超えてしまうなら, 新たなビンを用意し, そこに詰める

このときの解は14

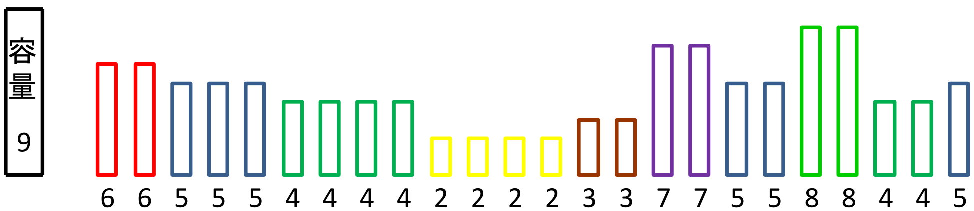


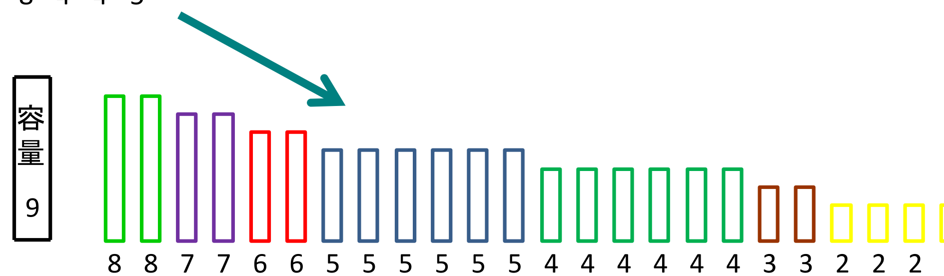
ここまでのヒューリスティクスは**オンライン**(アイテムに関する情報が全て与えられていない, 一度入れたら移動できない)だった.
→**オフライン**ヒューリスティクスを利用してよりいい解を求める

ヒューリスティクスによる求解

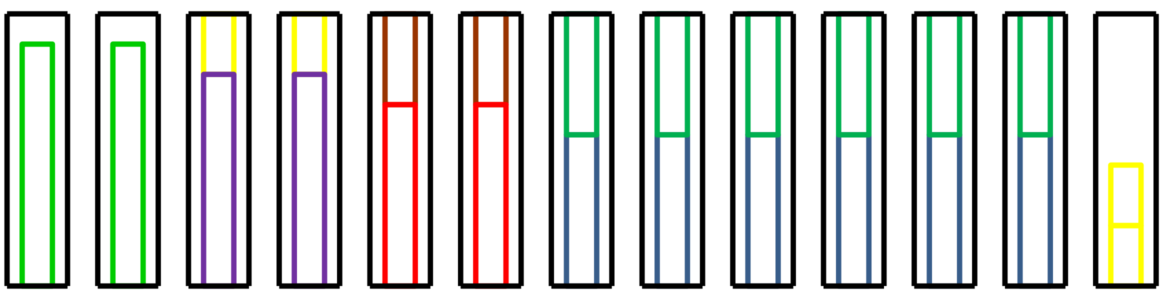
first fit decreasing ヒューリスティクス

first fitヒューリスティクスを適用する前にアイテムサイズを非増加順に並びかえる.





このときの解は13



最悪値解析

ここまで幾つかヒューリスティクスを紹介したが,
厳密解(最適値)に対してどれくらいの乖離があるのだろうか??

- $A(I)$: 問題例 I に対して近似解法 A を適用したときの近似値
- $OPT(I)$: 問題例 I に対する最適値
- $r(I)$ $$r(I) = \frac{A(I)}{OPT(I)} \quad (1.1) \quad (\geq 1) \quad \text{(最小化問題のとき)}$$

定義

近似解法 A を適用する問題の全ての問題例 I に対して

$$r(I) \leq r \qquad (1.2)$$

成立するとき近似解法 A は**性能比率** r をもつとよぶ

特に関心があるのは問題のサイズが大きくなったときの性能比率である

最悪値解析

定義

$$r_k = \sup_{I:OPT(I)=k} \frac{A(I)}{OPT(I)} \qquad (1.3) \qquad (\text{最小化問題のとき})$$

と定義する. ここで $\sup$ は**上限**※を表す記号である.

$$\lim_{k\to\infty} \sup r_k \le r \qquad (1.4)$$

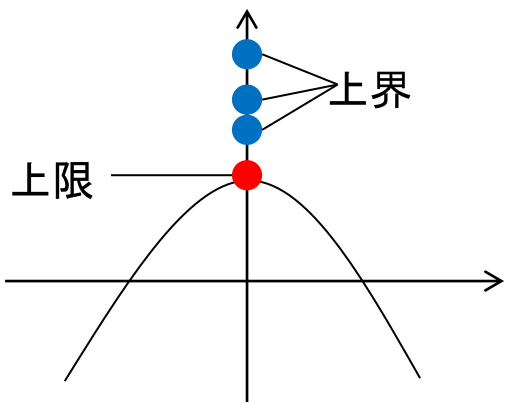
が成立するとき, 近似解法 A は**漸近的性能比率** r をもつとよぶ. ここで $\lim \sup$ は上極限※を表す記号である.

性能比率、あるいは**漸近的性能比率**で
近似解法を評価する方法を**最悪値解析**という

→ヒューリスティクスの最悪値解析について考える

捕捉

実数からなる集合 A と実数 X があるとする.
X が A の**上界**であるとは, A の任意の要素に対して
$a \leq X$ であることである.

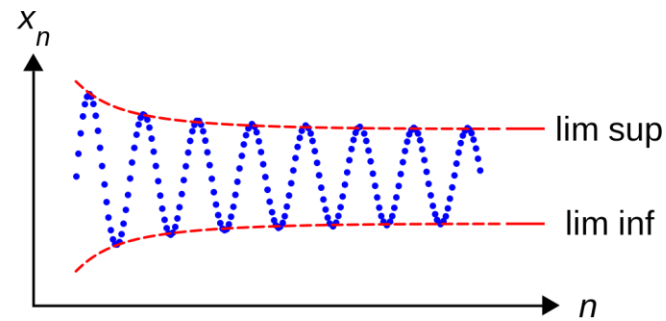


例)

$f(x) = -x^2 + 3$　　$f(x) \leq 10$　　$f(x) \leq 100$　　$f(x) \leq 1000$

これらは全て $f(x)$ の上界といえる

上限とは複数存在する上界のうち最小のもののこと.
$f(x)$ の上限は3になる



上極限とは数列の要素を無限に増やしていったときの数列の挙動から決まる実数であり, 数列の極限になりうる値を上からおさえるためのもの

最悪値解析

アイテムサイズ w_i を非負の実数と仮定しビンのサイズ B が1になるようにスケーリングされているものとする. →アイテムサイズ w_i をビンのサイズ B で割ることで, $0 \leq w_i \leq 1$ としておく.

命題 $$\sum_{i \in N} w_i \leq OPT(I)$$

→最適値はアイテムを自由に切り刻んでよいときのビンの数より大きい

next fit ヒューリスティクスを最悪値解析するとその性能比率は2

定理1.1 $$A_{nf}(I) \leq 2OPT(I)$$

※ $A_{nf}(I)$ next fit ヒューリスティクスによる近似解

この定理1.1を命題を用いて証明する

next fit ヒューリスティクスの性能保証

証明

next fit ヒューリスティクスによって得られた解において, ビン j に入れられたアイテムのサイズの合計を W_j と書く. このとき, 常に(1.5)が成立する.

$$W_j + W_{j+1} > 1 \quad (1.5)$$

(ⅰ) $A_{nf}(I)$ が偶数のとき

式(1.5)を $j = 1,3,\ldots A_{nf}(I)-1$ に対して加えると式(1.6)を得る

$$A_{nf}(I)\Big/2 < \underline{(W_1 + W_2) + (W_3 + W_4) + \cdots + \left(W_{A_{nf}(I)-1} + W_{A_{nf}(I)}\right)} \quad (1.6)$$

$$\sum_{i \in N} w_i$$

命題*より $\underline{A_{nf}(I)} < 2\sum_{i \in N} w_i \le \underline{2OPT(I)}$ を得る

※ $\sum_{i \in N} w_i \le OPT(I)$

next fit ヒューリスティクスの性能保証

証明(続き)

（ｉ）$A_{nf}(I)$ が奇数のとき

式(1.5)※を $j=1,2,3,\ldots A_{nf}(I)-1$ に対して加えると式(1.7)を得る　※ $W_j+W_{j+1}>1$ (1.5)

$$A_{nf}(I)-1<(W_1+W_2)+(W_2+W_3)+(W_3+W_4)\cdots+\left(W_{A_{nf}(I)-1}+W_{A_{nf}(I)}\right) \qquad (1.7)$$

W_1 と $W_{A_{nf}(I)}$ 以外は重複しているので両辺に W_1 と $W_{A_{nf}(I)}$ を加えて2で割ると式(1.8)を得る.

$$\left(A_{nf}(I)-1+W_I+W_{A_{nf}(I)}\right)/2<\sum_{i\in N}w_i\leq OPT(I) \qquad (1.8)$$

$$\rightarrow \quad A_{nf}(I)<2OPT(I)+1 \qquad (1.9)$$

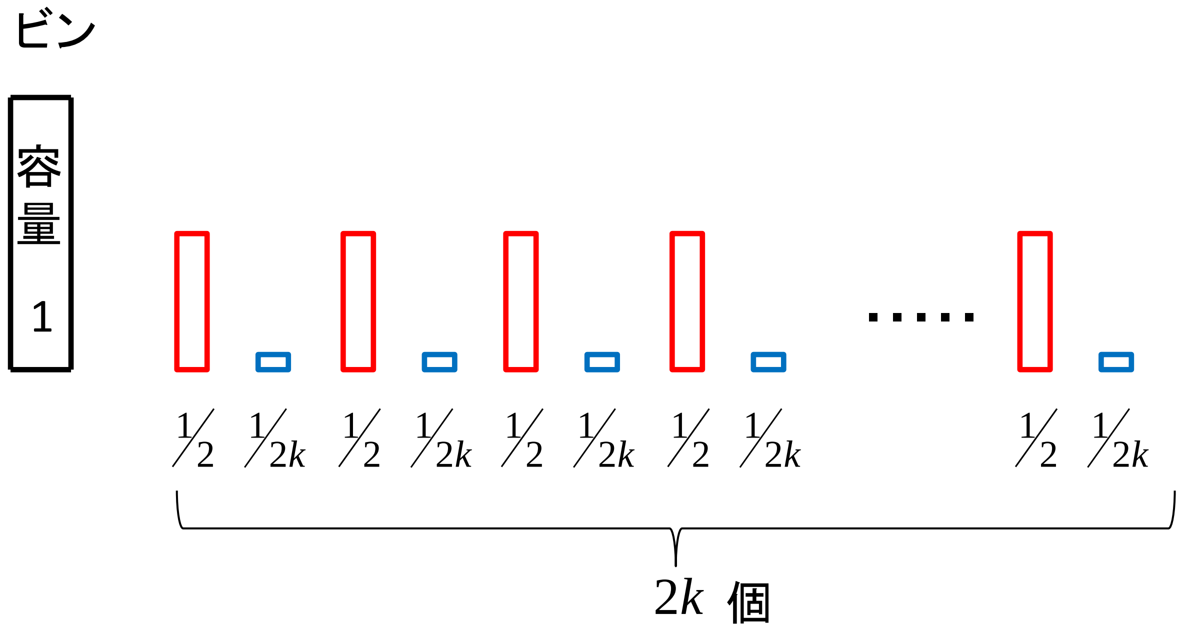
以上から定理は証明された ■

next fit ヒューリスティクスの性能比率は2であることがわかった

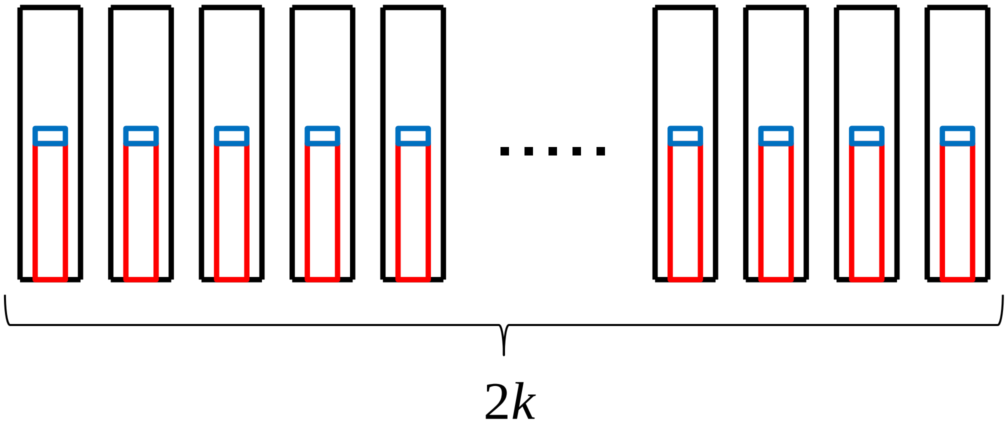
next fit ヒューリスティクスの性能保証

アイテムのサイズが大きくなった場合でもこの性能は改善されないのか?

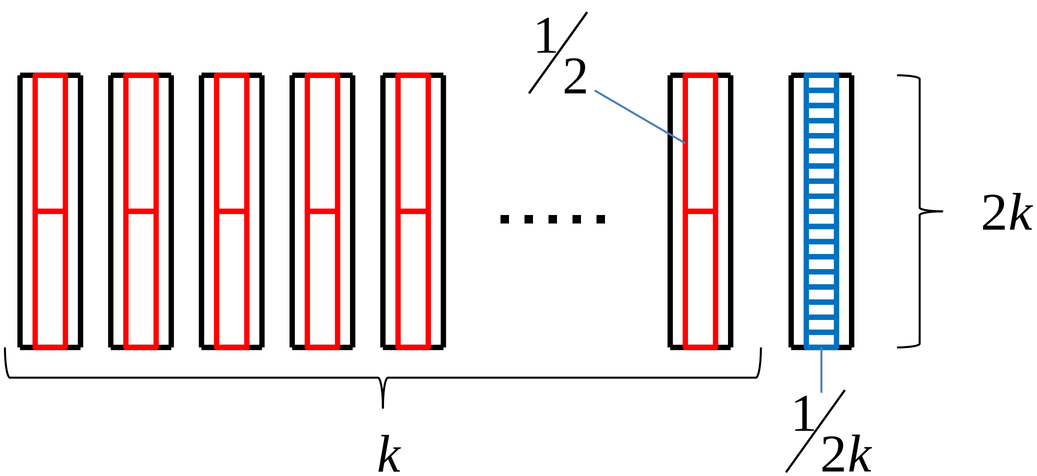
ある正数 k に対して $4k$ 個のアイテムサイズからなる問題例を考える.
奇数の番号をもつアイテムに対するサイズを $1/2$, 偶数の番号をもつアイテムに対するサイズを $1/2k$ に設定する. ビンのサイズは1.



next fit ヒューリスティクスの性能保証



$$A_{nf}(I) = 2k$$



ぴったりはまっているので最適解
→　$OPT(I) = k+1$

$$r(I) = A_{nf}(I) / OPT(I) = 2k / (k+1) \rightarrow \lim_{k\to\infty} r(I) = 2$$

next fit ヒューリスティクスの性能保証

大きなアイテムがない方が直感的にビンの隙間が減るので解は改善されそうである.

ある正の実数 $\alpha(<1/2)$ に対してアイテムのサイズを $w_i \le \alpha$ と制限したビンパッキング問題例 I について以下の定理1.2が成立する.

定理1.2 $A_{nf}(I) \le \dfrac{1}{1-\alpha} OPT(I) + 1$

証明

next fit ヒューリスティクスによって得られた解において, ビン j に入れられたアイテムのサイズの合計を W_j と書く. このとき, 最後のビン以外は式(1.10)が成立する.

$$W_j > 1-\alpha \qquad (1.10)$$

命題と式(1.10)より

$$OPT(I) \ge \sum_{i \in N} w_i = \sum_{j=1}^{A_{nf}(I)} W_j > \sum_{j=1}^{A_{nf}(I)-1} (1-\alpha) = (1-\alpha)(A_{nf}(I)-1) \quad \blacksquare$$

近似スキーム

定義

近似解法 A を適用する全ての問題例 I に対して

$$\frac{|OPT(I)-A(I)|}{OPT(I)} \leq \varepsilon$$

が成立するとき, A は**相対誤差**をもつという

最小化問題のとき

$$\frac{A(I)}{OPT(I)} \leq \varepsilon + 1 = r$$

この相対誤差を制御できることを考える.問題例 I の他に相対誤差 $\varepsilon > 0$ も入力の一部と考えた近似解法への拡張を考える.

定義

問題例 I と相対誤差の上限 $\varepsilon > 0$ を入力したとき, 近似値 $A(I,\varepsilon)$ を出力するアルゴリズムを考える. このとき全ての問題例 I に対して

$$\frac{|OPT(I)-A(I,\varepsilon)|}{OPT(I)} \leq \varepsilon$$

を満たす近似解を算出するとき, この ε によって制御可能なアルゴリズムを**近似スキーム**とよぶ.

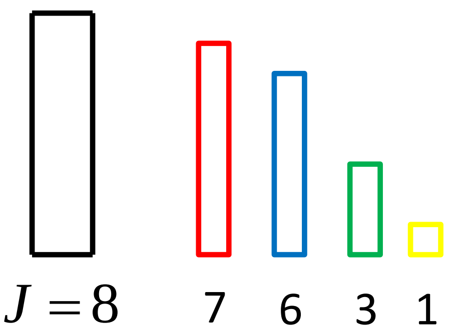
ビンパッキング問題の近似スキーム

ビンパッキング問題を整数計画問題(解が整数に限定された問題)として定式化する

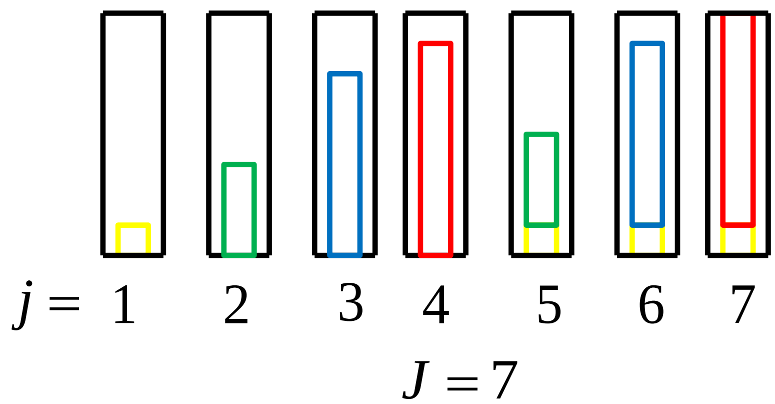
1本のビンへの詰め合わせパターンの全てを列挙し, そのパターンを $j=1,2,\ldots,J$

とする. 但し、J は実行可能な詰め合わせパターンの総数である.

例えば, 下図のような簡単なビンパッキング問題を考える.



詰め合わせ可能な
パターンは右の7通り



また s_i^j ををアイテム i がパターン j で使われているとき1, それ以外のとき0の変数とする

例えば, $s_1^1=s_1^5=s_1^6=s_1^7=1$, $s_1^2=s_1^3=s_1^4=0$ である.

このパターンを複数用いることで解を出力できるが, それが実行可能解であるためには次の式が成り立つ. $\sum_{i=1}^{n} s_i^j \le 1$ 負等号逆??

ビンパッキング問題の近似スキーム

ビンパッキング問題は全ての可能なパターンから, 各アイテムをちょうど一回使用し,
使用するビンの数を最小とする詰め合わせのパターンを選択問題となる.

minimize $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} x_j$ →パターン j が解として使われているとき1, それ以外0の変数

subject to $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} s_i^j x_j = 1 \qquad \forall i = 1,2,\ldots n$ →各アイテムがちょうど一回使用されることを表す.

$$x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j = 1,2,\ldots, J$$

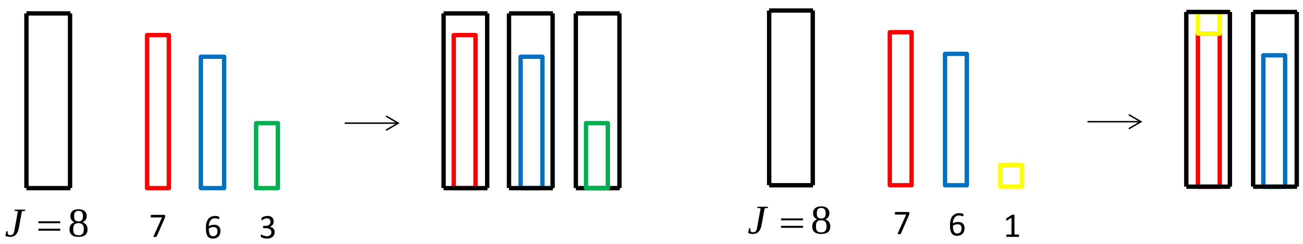
この問題もNP-困難問題で, 集合分割問題とよばれる. この問題をもとに
近似解法を設計するには以下の二つの問題がある.

この問題もNP-困難問題で, 集合分割問題とよばれる.問題として以下の二つがある.

1. 実行可能な詰め合わせの数が膨大
2. 線形計画緩和の解を切り上げることで実行可能解を導きたいが, 最悪の場合 n の数だけ切り上げがおきる.(近似スキームは n に依存しない)

ビンパッキング問題の近似スキーム

以下では $\varepsilon < 1$ とする.
実行可能な詰め合わせの最悪値は最も小さいアイテムの大きさに依存する.
例)



そこで, ある程度小さいアイテムは一時的に除き, 大きいアイテムに対して近似解を求め, その後で適当なヒューリスティクスによって隙間に小さいアイテムを詰めていく戦略が考えられる.→どれくらい小さければいいのか??

補助定理

問題例 I から $\varepsilon/2$ 未満のサイズのアイテムを除いた問題例を I' とし, I' に対する任意の実行可能解を $A(I')$, その解に除いたアイテムを first fit ヒューリスティクスによって詰めることによって得た問題例 I の実行可能解の値 $A(I)$ と書く. このとき以下の2式のいずれか一方が成立する.

$$A(I) \leq (1+\varepsilon)OPT(I)+1 \qquad A(I) = A(I')$$

ビンパッキング問題の近似スキーム

問題点2. について.　**離散化**とよばれるテクニックを導入する.

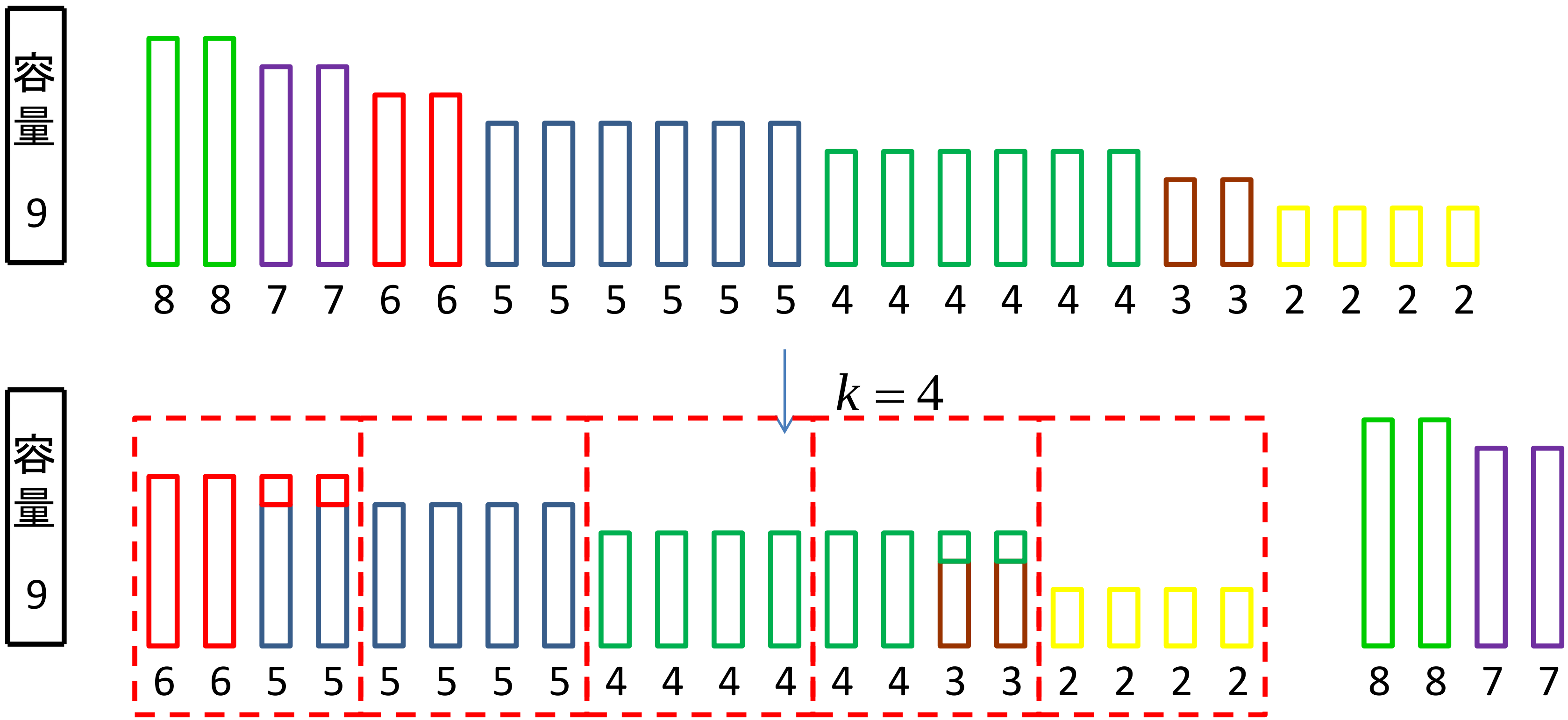
ビンパッキング問題の離散化例

問題例 I' に対して, 離散化問題例 $\hat{I}$ を次のように定義する.

$SIZE(I') = \sum_{i=1}^{n} w_i,\ \ k = \lceil \varepsilon SIZE(I') \rceil$ とする.

1. アイテムを非減少順にならべ, 大きいものから順に k 個ずつのグループ化する. アイテムサイズの大きい順に $0,1,2..,m$ とする. 但し, $m \le n/k$
2. グループ0内の全てのアイテムを除く.
3. 残りのグループ $1,2..,m$ の全てのアイテムサイズをグループ内の最も大きいものに一致させる.

ビンパッキング問題の近似スキーム



このとき,明らかに $OPT\left(\hat{I}\right) \leq OPT\left(I'\right)$ (1.11)

また, $A\left(I'\right) \leq A\left(\hat{I}\right) + k$ (1.12) が成立する.(取り除いたアイテムの数は k 以下なので)

ビンパッキング問題の近似スキーム

ここで, グループ i のアイテムのサイズを $\hat{w}_i$ とし, それぞれ n_i 個あるとする

また, 1本のビンへの詰め合わせ可能なパターンのリストを

$$\left(t_1^k, t_2^k, \ldots, t_m^k\right), \qquad \forall k = 1,2,\ldots,K \quad \text{とする.}$$

但し, t_i^k は詰め合わせ k における, サイズ $\hat{w}_i$ のアイテムの数であり, $\sum_{i=1}^{m} t_i^k \hat{w}_i \leq 1$ を満たす

実行可能なリストからビンの数を最小とする組み合わせを
選択する問題は以下のように定式化される.

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^{K} x_k$$

←パターン k が使われていると1,
それ以外0の変数

$$\text{subject to} \quad \sum_{k=1}^{K} t_i^k x_k \geq n_i \qquad \forall i = 1,2,\ldots m$$

←いずれかのパターンでは使われるから

$$x_k \in Z_+ \qquad \forall k = 1,2,\ldots,K$$

この問題の線形緩和問題を解き, 端数を切り上げることで離散化問題の実行可能解を得る.

ビンパッキング問題の近似スキーム

補助定理

離散化問題 $\hat{I}$ に対する, 線形計画緩和問題の最適解を $LP(\hat{I})$,切り上げによって得られた実行可能解の値を $A(\hat{I})$ とする. このとき式(1.13)が成り立つ.

$$A(I') \le LP(\hat{I}) + m \quad (1.13)$$

これは端数をもつ変数の数はせいぜい m 個であるからである.

以上の補助定理や導出式ををまとめると, 以下の定理を得る.

$$A(I) \le (1+\varepsilon)OPT(T) + \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$$

これはアイテムサイズ　に依存せず, かつ相対誤差εによって近似値をおさえることができており, 近似スキームである.

1章　まとめ

〇最適化問題は選択肢を列挙すると膨大で,
　効率的に解くことが難しい

--いくつかのヒューリスティクスを用いて求解

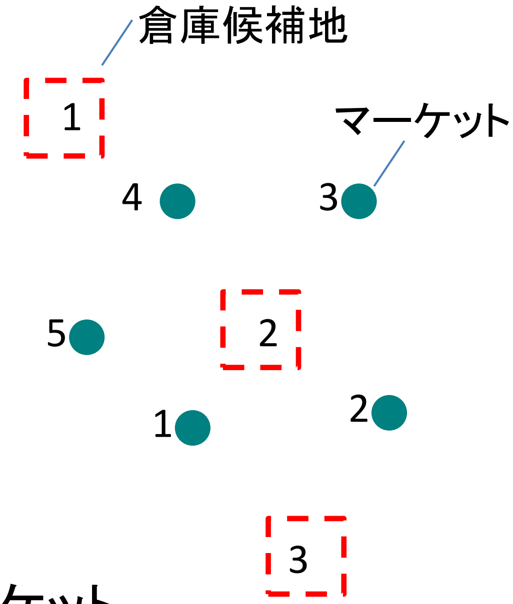
--解の精度を検証するために性能比率, 相対誤差
　の概念を導入し, 近似スキームを導いた

第2章　施設配置の数理

施設配置問題

施設配置可能地点(候補), 需要をもつ顧客の集合が与えられ, ある基準を満たす施設の配置場所を決定する問題. (今回ある基準とは施設を利用して顧客に配送を行う場合の費用の最小化である.)

マーケット	1	2	3	4	5	
年間需要量	180	80	200	160	220	
倉庫	輸送費用					開設費用
1	1000	800	600	500	400	100000
2	600	500	400	300	600	100000
3	300	400	500	500	900	100000



倉庫の候補地1,2,3のうちどこを開設して, それぞれのマーケット1,2,3,4,5へどの倉庫からどれだけ運ぶかを費用を最小化するように決定する

数理計画

数理計画 ・・・実際の問題を数式として書き下すことを経由して最適解,
もしくはそれに近い解を得るための方法論

一般形　minimize　目的関数

subject to　制約式1, 制約式2・・・・

線形計画モデル ・・・数理計画のうち目的関数や制約式が線形式であるもの

例　minimize　$3x+4y$

subject to　$5x+6y\geq 10 \quad 7x+5y\geq 5 \quad x,y\geq 0$

すべてを線形モデルとして定式化できるわけではないので...

整数計画・・・ 求めたい変数が特定であるという制限がある.

混合整数計画・・・ 一部の変数が整数に限定されている.→これを用いる

施設配置問題の定式化とモデリング

minimize

$$\underbrace{\sum_{i\in I} f_i y_i}_{\text{倉庫のリリース費用}} + \underbrace{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}}_{\text{マーケットへの総輸送費用}}$$

subject to

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = D_j \quad (2.1)$$

→マーケットの需要は満たされる

強制制約→

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \le My_i \quad (2.2)$$

→倉庫をリースした場合のみ, その 倉庫から輸送できることを意味する. M は非常に大きな数を表し"Big M"とよばれる.

$$x_{ij} \ge 0$$

$$y_i \in \{0,1\}$$

- I :倉庫の候補地点の集合. さっきの問題だと $I=\{1,2,3\}$
- J :マーケットの集合. さっきの問題だと $J=\{1,2,3,4,5\}$
- i :倉庫の候補地点を表す添え字. $i\in I$
- j :マーケットを表す添え字. $j\in J$
- c_{ij} :倉庫 i からマーケット j への輸送費用
- f_i :倉庫 i を開設するときにかかる固定費用
- D_j :マーケット j の需要量
- x_{ij} :倉庫 i からマーケット j への輸送する量
- y_i :倉庫 i をリースするとき1, それ以外のとき0.

施設配置問題の定式化とモデリング

ソルバーで解いたときの解

マーケット	1	2	3	4	5
倉庫	最適輸送量				
1	0	0	0	0	0
2	180	80	200	160	220
3	0	0	0	0	0

倉庫2のみを開設し, そこから
全てのマーケットへ輸送を行う

このときの最適費用は508000万円

全ての倉庫が開設されているときの解

マーケット	1	2	3	4	5
倉庫	最適輸送量				
1	0	0	0	0	220
2	0	0	200	160	0
3	180	80	0	0	0

このときの最適費用は302000万円
→開設費用などの固定費がなければ分散させた方が効率的

上手なモデル化のために

Big Mは論理的な定式化が簡単に行える⇔ソルバーに大きな負荷がかかり大規模問題の求解を困難にすることがある.

$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq My_i$ これは総需要量 $\sum_{j \in J} D_j$ より小さいので M と置き換えられる

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq \left(\sum_{j \in J} D_j \right) y_i$$

→これは式(2.1)を分解したものととらえられる

→それでもそこそこ大きいのでΣを外して次の式(2.3)のようにする

$$x_{ij} \leq D_j y_i \qquad i \in I, j \in J \qquad (2.3)$$

強い定式化と弱い定式化

複数の方法で定式化できる場合, **弱い定式化**より**強い定式化**が推奨される.

定式化の強弱

同じ問題に対して二つの定式化, A, Bがあるとする. 各々の整数条件を緩和することで線形計画緩和問題が得られる. A, Bの各々の線形計画緩和問題の実行可能領域を P_A , P_B とする. 領域 P_B が領域 P_A を含んでいるとき, すなわち $P_A \subset P_B$ のときには, 定式化Aは定式化より**強い定式化**である. (同時に定式化Bは**弱い定式化**である.)

例) $x_{ij} \le D_j y_i \quad i \in I, j \in J$ と $\sum_{j \in J} x_{ij} \le \left(\sum_{j \in J} D_j \right) y_i \quad \forall i \in I$ について

各々の実行可能領域を順に P_A ,P_B とする. 後者の制約は前者の制約を足し合わせたものであるので $P_A \subseteq P_B$ と考えられる.
→実際後者の制約で解いた場合に前者の制約を破る解が存在した.

ウェーバー問題

ウェーバー問題

各顧客 i は平面上に分布しているものとし, その座標を (X_i, Y_i) とする.顧客は需要 w_i をもち, 目的関数は施設と顧客の間の距離に需要量を乗じたものの和とする. 顧客と施設間の距離は $l_p(1 \leq p)$ノルム を用いて計算される.
このとき顧客施設への移動距離の和を最小とする施設の位置はどこかを求める問題

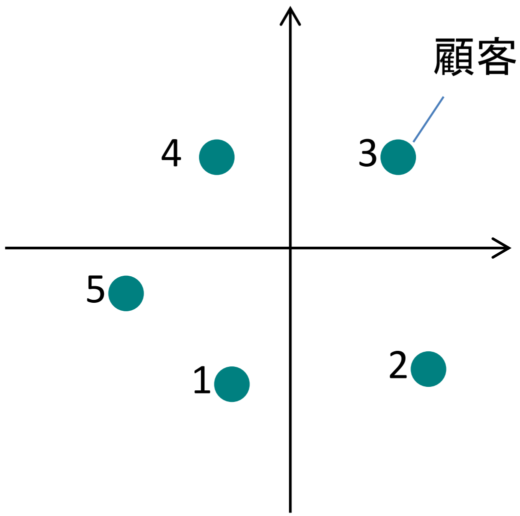
ある施設 i と j の距離は式(2.4)で与えられる.

$$\left\{ \left| X_j - X_i \right|^p + \left| Y_j - Y_i \right|^p \right\}^{1/p} \qquad (2.4)$$

このときウェーバー問題とは

$$f(X, Y) = \sum_{i \in I} \left\{ \left(X_j - X_i \right)^p + \left(Y_j - Y_i \right)^p \right\}^{1/p} \qquad (2.5)$$

式(2.5)を最小化する (X, Y) を求める問題となる.



ウェーバー問題

$$f(X,Y)=\sum_{i\in I}\left\{\left(X_j-X_i\right)^p+\left(Y_j-Y_i\right)^p\right\}^{1/p} \quad (2.5)$$

$f(X,Y)$ は凸関数であるので(→2階微分が正)求める (X,Y) が満たす必要十分条件は

$\dfrac{\partial f(X,Y)}{\partial X}=0$ および $\dfrac{\partial f(X,Y)}{\partial Y}=0$ である.

$$\frac{\partial f(X,Y)}{\partial X}=\sum_{i\in I}w_i\left(X-X_i\right)\frac{\left|X-X_i\right|^{p-2}}{\left\{\left(X-X_i\right)^p+\left(Y-Y_i\right)^p\right\}^{(p-1)/p}}=0$$

これは陽的には解けない※　が以下の繰り返し式(2.6)を示唆している.

$$X^{(q+1)}=\frac{\sum_{i\in I}w_i\left|X^{(q)}-X_i\right|^{p-2}X_i/\left\{\left(X^{(q)}-X_i\right)^p+\left(Y^{(q)}-Y_i\right)^p\right\}^{(p-1)/p}}{\sum_{i\in I}w_i\left|X^{(q)}-X_i\right|^{p-2}/\left\{\left(X^{(q)}-X_i\right)^p+\left(Y^{(q)}-Y_i\right)^p\right\}^{(p-1)/p}} \quad (2.6)$$

右辺を X の関数だとみなすと式(2.6)は $X=f(X)$ と書きなおすことができる.

式(2.6)のように写像 $f:X\to X$ に対して $x=f(x)$ を満たす x を**不動点**とよぶ.

捕捉

陽的に解けるとは?

$f(x,y)$ の極致を求めることを考える

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$ を解けばよいが拘束条件があると勝手に偏微分できない.

例えば拘束式 $g(x,y)=c$ があるとする. もしこの拘束式が $x=h(y)$
のように表すことができれば偏微分の式に代入すれば計算が可能になる.
このような操作が可能なことを陽的に解けるという.

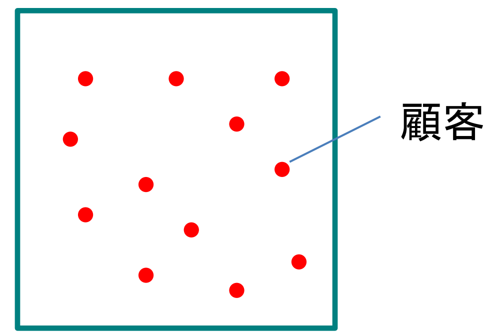
もしこの問題で陽的に解けない場合はラグランジュの未定乗数法によって解くことができる.

集約ヒューリスティクス

$P_n = \{x_i,\ i = 1,2,\ldots n\}$ を $[0,1]^2$ 内の　個の点(顧客集合)とする.但し, $x_i = (X_i, Y_i)$

距離はユークリッド距離 $(p = 2)$ とし, 顧客 i の需要量は全て1とする.
また, 点 x_i, x_j 間のユークリッド距離を $\|x_i - x_j\|$ と記す.

このとき P_n に対して k 個の施設を顧客集合内から選択する k -メディアン問題を考える.



目的関数は式(2.7)のようになる.

$$L(k; P_n) = \min_{S \subseteq \{1,\ldots,n\}, |S| = k} \sum_{i \in P_n} \min_{j \in S} \|x_i - x_j\| \qquad (2.7)$$

・最初のminは k 個の施設を総移動距離が最小になるように選択することを表す

・次のminは各顧客 i は選択された中で移動距離が最小となる施設 j を利用することを表す.

集約ヒューリスティクス

集約ヒューリスティクス

1. $[0,1]^2$ の1辺を t 等分し, t^2 個の部分領域 $R_i,\ i=1,2,\dots t^2$ に分割分割する. 領域 R_i に含まれる点集合を $\hat{P}_i(\subseteq P_n)$ とし, 領域 R_i と R_j 間の最短距離を R_i 内の点と R_j 内の点の距離の最小値で定義し, $d(R_i,R_j)$ と記す. また, $\hat{P}_i$ が空でない領域の添字集合を N と書く
2. 各領域を一つの点と見立てた以下の重み付き k -メディアン問題を解き, その最適値を $\overline{L}(k;P_n)$ と書く

$$\overline{L}(k;P_n)=\min_{T\subseteq N,|T|=k}\sum_{i\in N}\min_{j\in T}\left|\hat{P}_i\right|d(R_i,R_j) \qquad (2.8)$$

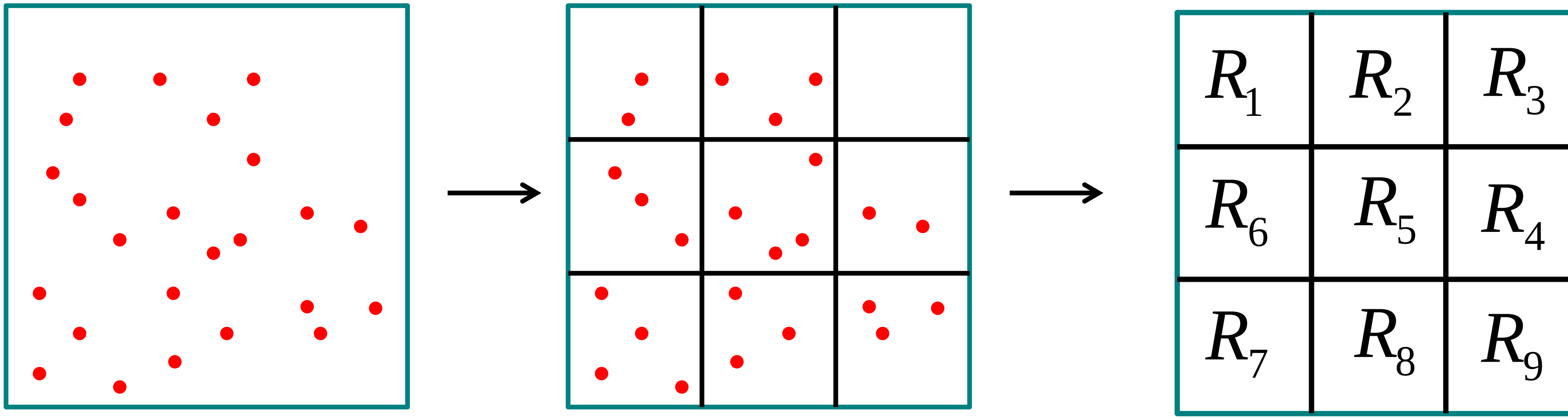
3. 上の2.で定義された問題の最適解　に対応する領域から任意に一つの点を選び, それらを近似解として出力する

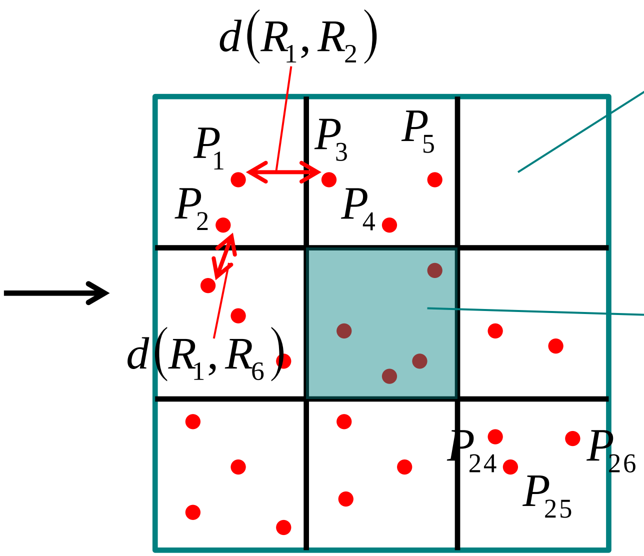
・式(2.8)の最初のminは顧客が存在する領域から総移動距離が最小となる点を k 個選択することを表す.

・式(2.8)の次のminは選ばれた施設(領域)の中で移動距離が最小となる施設を利用することを表す.

集約ヒューリスティクス

$t = 3$ の場合を考える

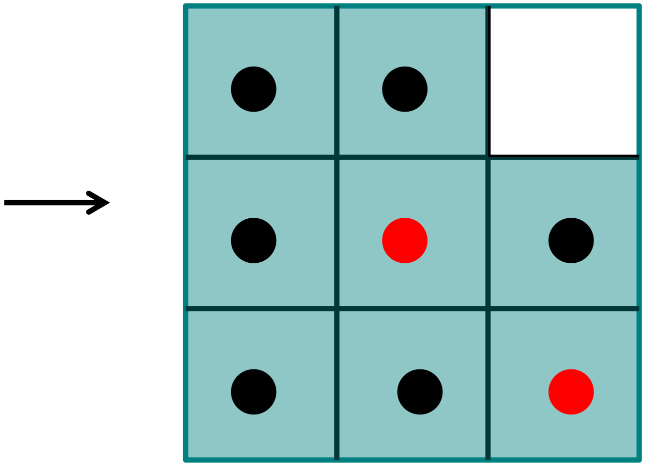




R_3 には点がないので
$N = \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$

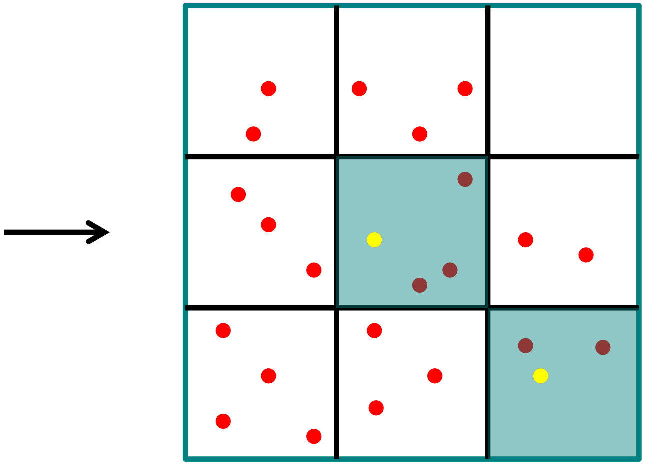
この領域 R_5 に含まれる点の集合を $\hat{P}_5$

集約ヒューリスティクス



この8つの点と各々の点の距離を使って集約前と同様の計算を行い, どの点に施設を配置するか決定する.

例えば,$k=2$ だと, 最適な2点を決定する.
R_5, R_9 が解だとする.



それぞれの領域から適当に一点ずつを選択し, それを近似解とする.

集約ヒューリスティクス

定理

$P_n = \{x_i \mid i = 1,2,\ldots n\}$ を $[0,1]^2$ 内のn 個の点集合, ユークリッド k -メディアン問題の最適値を $L(k;P_n)$, パラメータt をもつ集約ヒューリスティクスの近似値を $\overline{L}_{ah}(k;P_n)$ とする.

式(2.9)が成立する.

$$\overline{L}_{ah}(k;P_n) - L(k;P_n) \le \frac{2\sqrt{2}(n-k)}{t} \qquad (2.9)$$

- 多くの顧客(点)に対する問題を, 適当に集約してもそれほどの誤差が生じないことを示唆している.
- 分割する領域に関するパラメータ t が大きくなればなるほど, 最適値との差は小さくなる

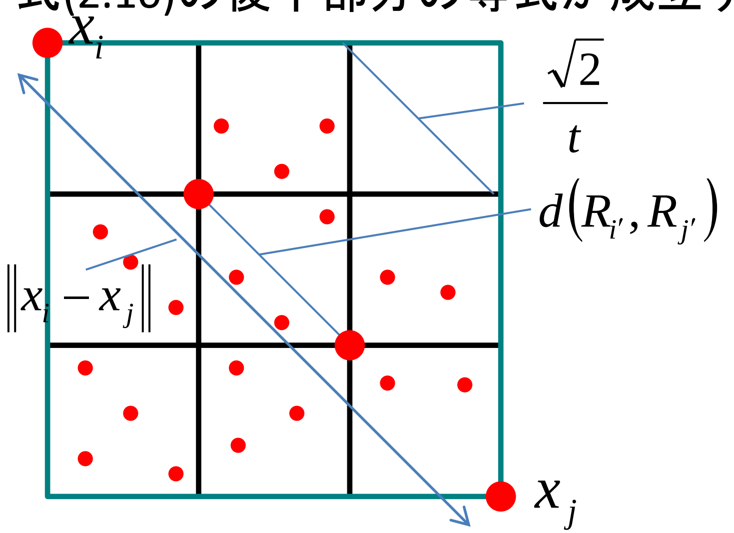
集約ヒューリスティクス

証明

任意の2点をx_i, x_j ,その2点を含む領域を $R_{i'}, R_{j'}$とする.このとき以下式(2.10)が成り立つ.

$$d\left(R_{i'}, R_{j'}\right) \le \left\| x_i - x_j \right\| \le d\left(R_{i'}, R_{j'}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{t} \qquad (2.10)$$

式(2.10)の後半部分の等式が成立するのは下図のような時である.



集約ヒューリスティクス

不等式(2.10)の前半と, $L(k;P_n), \overline{L}(k;P_n)$ の定義式(2.7), (2.8)より式(2.11)が成り立つ.

$$\overline{L}(k;P_n) \le L(k;P_n) \quad (2.11)$$

また不等式の後半から, メディアンとして選択された点を除く $n-k$ 個の点は
最悪の場合 $\left(2\sqrt{2}\right)/t$ だけ余分な距離がかかるので式(2.12)が成り立つ

$$\underline{L_{ah}(k;P_n)} \le \overline{L}(k;P_n) + \frac{2\sqrt{2}(n-k)}{t} \quad (2.12)$$

式(2.11)と式(2.12)を合わせることで定理を得る.

貪欲解法と劣モジュラ関数

次のような施設配置問題の変形を考える.

k-施設配置最大化問題

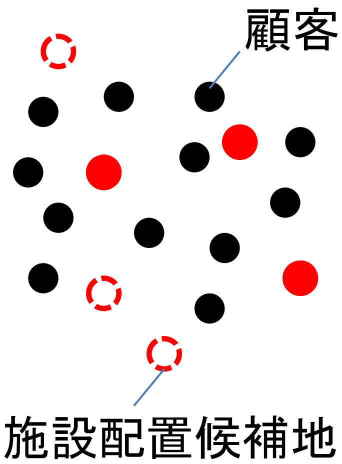
$c_{ij}(\geq 0)$ を顧客 $i \in I$ が施設 $j \in J$ からサービスを受けることによる利益とする. このとき, 配置候補地点 J からちょうど k 箇所の地点に施設を配置するとき, 総利益を最大にするものを求める.

$k = |S|$ を満たす配置可能地点の部分集合 $S \subseteq J$ に施設を配置したとき, 顧客 i の利益は $\max_{j \in S} c_{ij}$ と定義される. このときの目的関数値は全ての顧客の利益の和であり, それを $v(S)$ と書く. このときこの問題を**貪欲法**を用いて解くことを考える.

貪欲法 ・・・問題の要素を複数の部分問題に分割し, 各ステップごとに最も利益がでる評価値の要素を取り込んでいく, ステップごとに計算が進んでいくアルゴリズムである. 最適解を得られる問題とそうでない問題がある.

貪欲解法と劣モジュラ関数

k-施設配置最大化問題に貪欲解法を用いると以下のようなステップになる.
但し, $|S|=k=3, |I|=12, |J|=6$ とする.



ステップ1

-施設を一つ配置する場合に最も利益が最大になる施設を決定し, 集合 S に取り込む.(但し, S ははじめ空集合)

ステップ2

-ステップ1で取りこんだ場所に加えてもうひとつ施設を配置する場合に最も利益が最大になる施設を決定し集合 S に取り込む.

ステップ3

-ステップ1,2で取りこんだ場所に加えてもうひとつ施設を配置する場合に最も利益が最大になる施設を決定し集合 S に取り込む.

ステップ4

- $|S|=3$ になったので探索を終了し, 現在の S を解とする.

貪欲解法と劣モジュラ関数

定理

k-施設配置最大化問題の問題例 I に対する貪欲解法の解の値を $A_{greedy}(I)$,最適値を $OPT(I)$ と書く. このとき, 任意のk-施設配置最大化問題の問題例 I に対して以下の式(2.13)が成立する.

但し, e は自然対数である.

$$\frac{OPT(I)}{A_{greedy}(I)} \le \frac{1}{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^k} \le e/(e-1) \approx 1.582 \qquad (2.13)$$

この貪欲解法の解の精度保証を証明するためにこの問題の目的関数値 $v(S)$ が**劣モジュラ性**をもつことを示す.

貪欲解法と劣モジュラ関数

劣モジュラ性

任意の $S \subseteq T(\subset J)$ と $l \in J \setminus T$ に対して

$$v(T \cup \{l\}) - v(T) \le v(S \cup \{l\}) - v(S) \qquad (2.14)$$ が成立する.

またこの性質を満たす関数 v を劣モジュラ関数とよぶ.

劣モジュラ性の意味

式(2.14)の左辺は集合 T に対して, 新しい要素 l を加えたときの関数の増分,
右辺は T よりも小さい集合 S に対して新しい要素 l を加えたときの関数の増分を表す
→大きい集合に新しい要素を加えても大きな変化はないけど, 小さい集合に新しい要素を加えると変化が大きい.

貪欲解法と劣モジュラ関数

証明 (目的関数値 $v(S)$ が**劣モジュラ性**をもつこと)

$S \subseteq T$ のとき, 任意の顧客 $i \in I$ に対して, $\max_{j\in S} c_{ij} \le \max_{j\in T} c_{ij}$ が成立することから

$l \in J \setminus T$ に対して, 式(2.15)が成り立つ. 但し, $(x)^+$ は $\max\{x,0\}$ を表す演算子である.

$$\left(c_{il} - \max_{j\in S} c_{ij}\right)^+ \ge \left(c_{il} - \max_{j\in T} c_{ij}\right)^+ \qquad (2.15)$$

従って

$$\begin{aligned} v(S \cup \{l\}) - v\{S\} &= \sum_{i\in I}\left(c_{il} - \max_{j\in S} c_{ij}\right)^+ \\ &\ge \sum_{i\in I}\left(c_{il} - \max_{j\in T} c_{ij}\right)^+ \\ &= v(T \cup \{l\} - v(T)) \end{aligned}$$

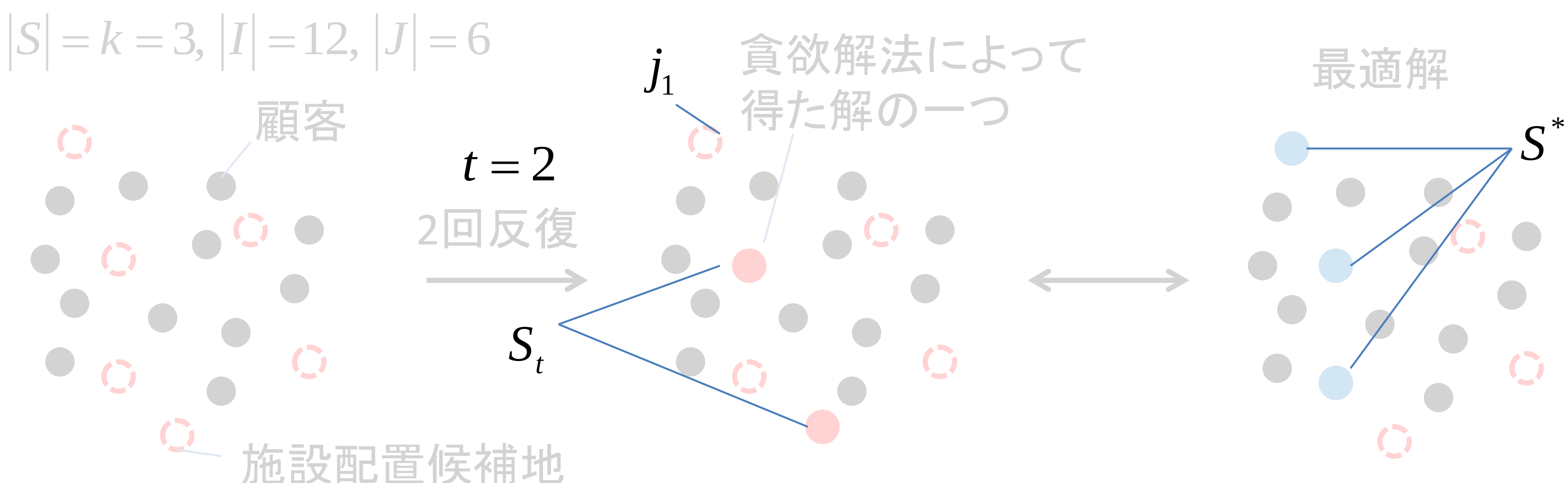
貪欲解法と劣モジュラ関数

証明

貪欲解法の途中で得られた施設の部分集合を $S_1, S_2, \ldots, S_k$,反復回数 $t(=0,1,\ldots,k-1)$ の時の目的関数の増加量を $x_t\left(=v(S_t)-v(S_{t-1})\right)$ とする.

このとき明らかに, $v(S_t)=\sum_{i=1}^{t} x_i,\ \forall t=1,2,\ldots,k$ である.

ここで 最適解における施設の集合を S^* , 貪欲解法の第 t 反復における施設の部分集合 S_t において, S^* に含まれるが, S_t に含まれないものを $j_1, j_2, \ldots, j_l$ とする. このとき, $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}=S^*\setminus S_t$ 及び $l\le k$ が成立する.



貪欲解法と劣モジュラ関数

証明(続き)

$$
\begin{aligned}
v(S^*) &\le v(S^* \cup S_t) \\
&= v(S_t \cup \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}) \\
&= v(S_t) + \sum_{i=1}^{l} \{v(S_t \cup \{j_1, \ldots, j_i\}) - v(S_t \cup \{j_1, \ldots, j_{i-1}\})\} \\
&\le v(S_t) + \sum_{i=1}^{l} \{\underline{v(S_t \cup j_i) - v(S_t)}\} \\
&\le v(S_t) + k x_{t+1}
\end{aligned}
$$

(劣モジュラ性より)　要素の増分はどちらも j_i

- S_t から要素を一つ増やしたときの関数の増分→ x_{t+1}
- $l \le k$

以下では, 貪欲解法の近似値 $A_{greedy}(I)$ を $1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ とすると,

最適値 $v(S^*) = OPT(I) \le 1$ が成り立てば定理は成り立つので, それを証明する.

$$
\frac{OPT(I)}{A_{greedy}(I)} \le \frac{1}{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^k} \le e/(e-1) \approx 1.582
$$

貪欲解法と劣モジュラ関数

証明(続き)

maxmize $\quad \xi$

subject to $\quad \xi \le \sum_{i=1}^{t} x_i + k x_{t+1}, \qquad \forall t = 0,1,2,\ldots,k-1$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \qquad x_i \ge 0, \qquad \forall i = 1,2,\ldots,k$$

近似値の仮定値

$v(S^*) \le v(S_t) + k x_{t+1}$ だから, $OPT(I)$ は上の問題の最適値以下である.

これを双対問題として解くことで,上界1を得るので, 題意を得る.

2章　まとめ

〇施設配置問題に関わる問題を複数の形で
　定式化を行った.

--線形計画問題に対してはモデリングの際に工夫
　することで簡単化できる.

--空間を区分して顧客を集約することで, ほどほどの
　精度の解を得ることが可能

第3章　経済発注の数理

経済発注モデルの仮定

1.需要は一定で1日あたり $d(\in R_+)$ 単位である. R_+ は非負の実数の集合.

2.品切れは許さない.

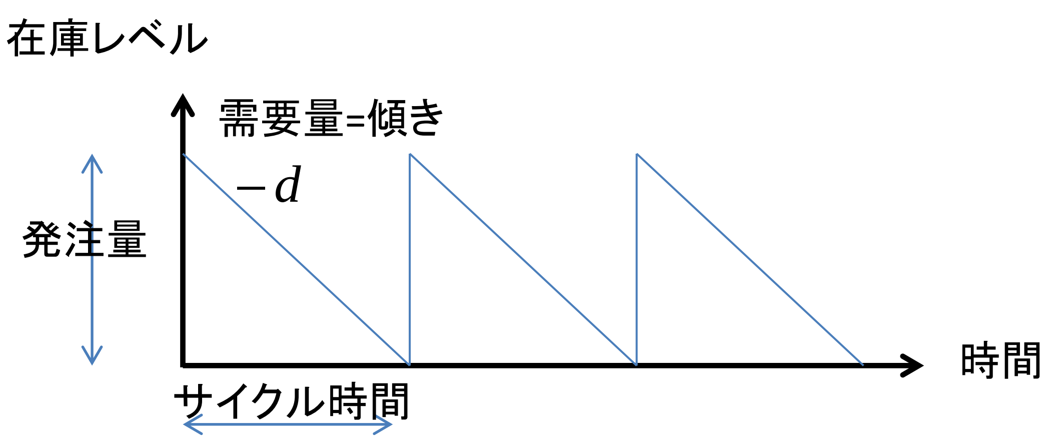
3.リードタイムは0→発注した時点で発注した量は在庫になる.

4.発注の際には発注量によらない固定費用 K がかかる.

5.在庫保管費用は品目1個あたり1日あたり $h(\in R_+)$ かかる.

6.考慮する時間は0

7.初期在庫は0である.



発注量を Q ，サイクル時間を T とする.

求めたいのは最適な Q である.

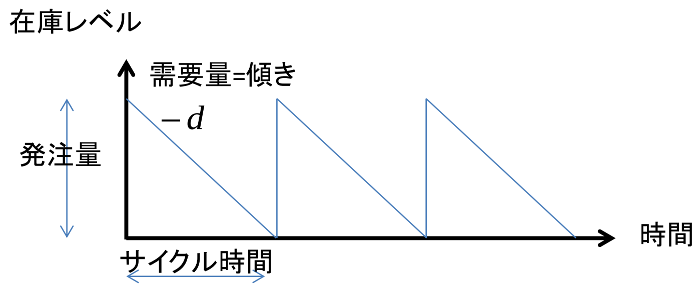
$$d = \frac{Q}{T} \qquad (3.1)$$

Harissのモデル

発注を１回行う間(1周期あたり)の総費用を考える.

総費用 = 発注費用 + 在庫保管費用

$$K \qquad + \qquad \frac{hTQ}{2}$$



1日あたりの費用は　で除すことで　Q を消去し, T だけの関数にすると以下の式(3.2)が得られる

$$\frac{K}{T} \qquad + \qquad \frac{hQ}{2} \quad (3.2) \qquad \longrightarrow \qquad f(T) = \frac{K}{T} + \frac{hdT}{2} \quad (3.3)$$

これは非線形な関数である→非線形最適化

非線形最適化の基礎

最適化とはある集合 F , F からの実数への写像 $f : F \to R$ が与えられたときに

$$\min\{f(x) : x \in F\} \qquad (3.3)$$

を与える x を求めることである. F を実行可能解の集合, その要素 x を**実行可能解**とよぶ.

目的関数 $f(x)$ を最小にする解 $x \in F$ を**大域的最適解**とよびその集合を F^* と記し以下のように定義される.

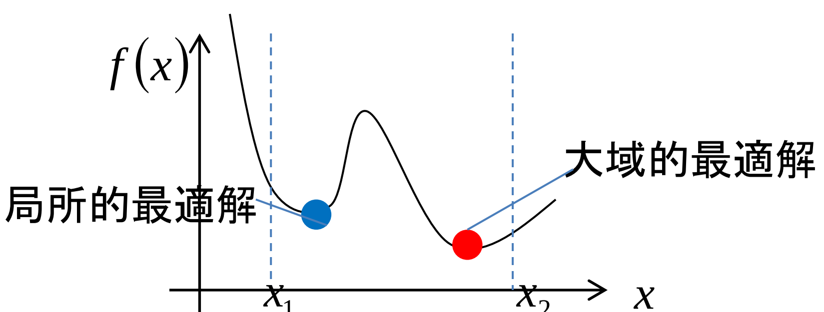
$$F^* = \{x \in F \mid f(x) \le f(y),\ \forall y \in F\}$$

実行可能解の集合 F を与えたとき, **近傍** N は以下の写像と定義される.

$$N : F \to 2^F$$

例) $F = \{1,2,3\} \to N = \{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}$

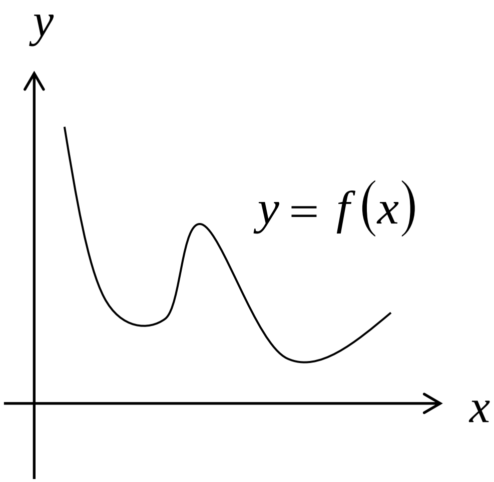
実行可能領域 $x \in F$ で, $f(x) \le f(y),\ \forall y \in N(x)$ を満たすものを**局所的最適解**という.



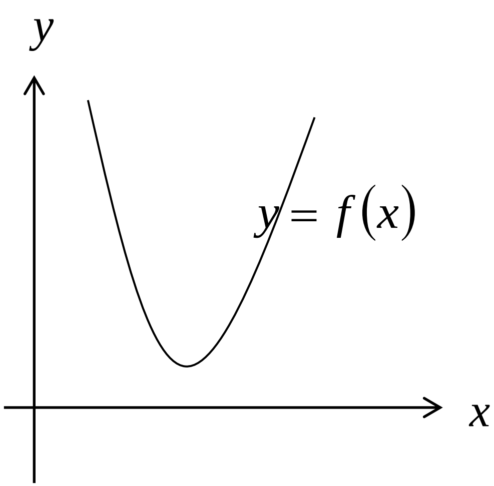
実行可能領域: $x_1 \le x \le x_2$

非線形最適化の基礎

直感的に関数の1階微分=0で答えがでそうであるが....



1階微分=0だけだと局所的最適解を求めてしまうこともある.
これくらいの関数ならその関数値を見比べればよいが,
複数ある場合などは非常に煩雑になる.
→1階微分=0で大域的最適解が求まる条件は?
→極小値が一つであればいい



左図のような形であればいい.
→傾きが常に増加していく
→2階微分が正であればいい
このような形をもつ関数を**凸関数**という.

非線形最適化の基礎

関数の凸性

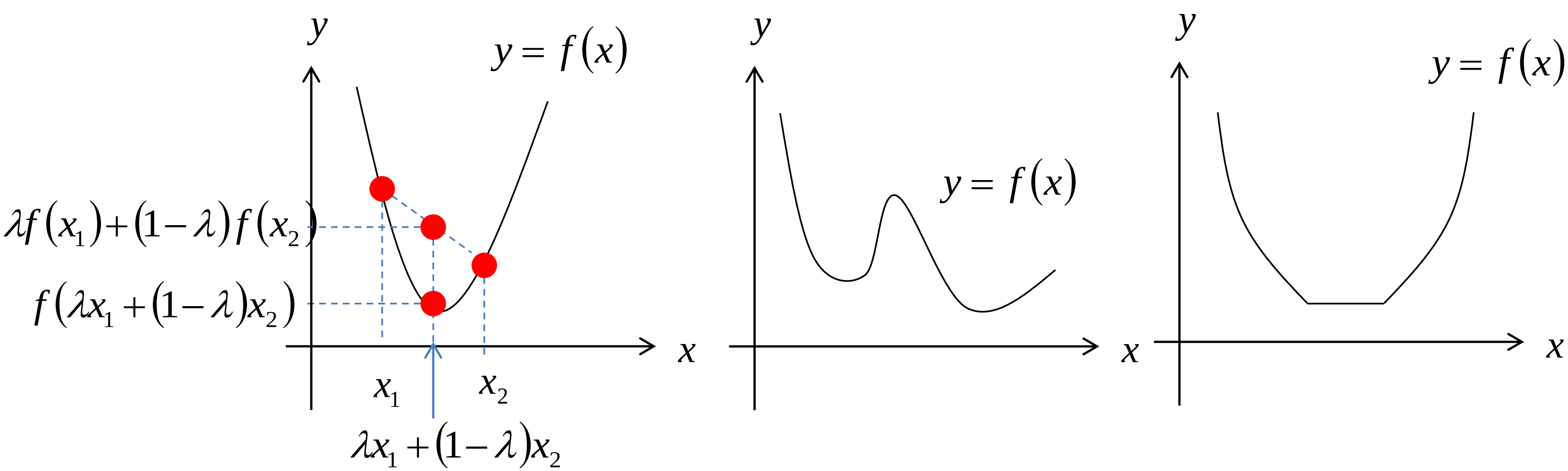
実数値関数 f が全ての$x_1, x_2 \in F$とスカラー $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

が満たされるとき, 凸関数とよばれ,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

を満たすとき, 真凸関数もしくは狭義の凸関数とよばれる.



多変数の場合は??

非線形最適化の基礎

1変数のときは2階微分の正負を考えたが, 多変数のときも同様

ベクトル $x=\{x_1,x_2,..x_n\}$ とする.

$f(x)$ を各成分 x_i で偏微分して得られる n ベクトルであり, $\nabla f(x)$ と記す

$$\nabla f(x)=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right]$$

f が2階微分可能なとき, f のヘッセ行列とは $\nabla f(x)$ の各成分を微分して得られる $n\times n$ であり, $Hf(x)$ もしくは $\nabla^2 f(x)$ と記す.

$$Hf(x)=\nabla^2 f(x)=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

このヘッセ行列が正定値行列であれば関数 f は真凸関数である.

行列 M が正定値であるときすべての n ベクトル x に対して $x^T Mx>0$ を満たす

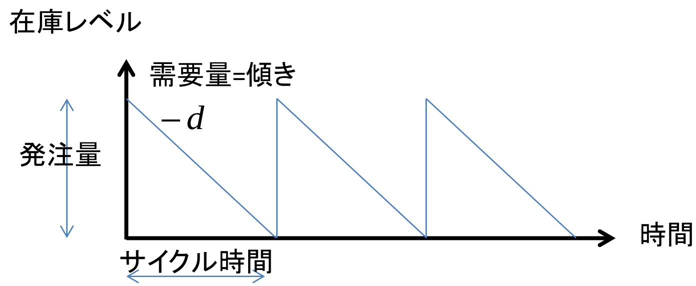
またヘッセ行列は対称行列であるので, **行列式が正**であれば正定値行列である.

ヘッセ行列が正定値であれば凸関数なので, このとき $\nabla f(x)=0$ を解けばよい

Harissのモデル

発注を1回行う間(1周期あたり)の総費用を考える.

総費用 = 発注費用 + 在庫保管費用



$$K \quad + \quad \frac{hTQ}{2}$$

$$\downarrow$$

1日あたりの費用は　で除すことで　Q を消去し, T だけの関数にすると以下の式(3.2)が得られる

$$\frac{K}{T} + \frac{hQ}{2} \quad (3.2) \longrightarrow f(T) = \frac{K}{T} + \frac{hdT}{2} \quad (3.3)$$

これは非線形な関数である→非線形最適化

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = -\frac{K}{T^2} + \frac{hd}{2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f(T)}{\partial T^2} = \frac{2K}{T^3} > 0 \longrightarrow$$ 2階微分が正なので真凸関数

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = 0 \longrightarrow T^* = \sqrt{\frac{2K}{hd}} \quad (3.3)$$ これが費用を最小とするサイクル時間

1日あたりの総費用の最適値は式(3.2)に代入して $\sqrt{2Khd}$ (3.4)

最適発注量 Q^* は式(3.1)に代入して $Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h}}$ これを**Hariisの公式**という

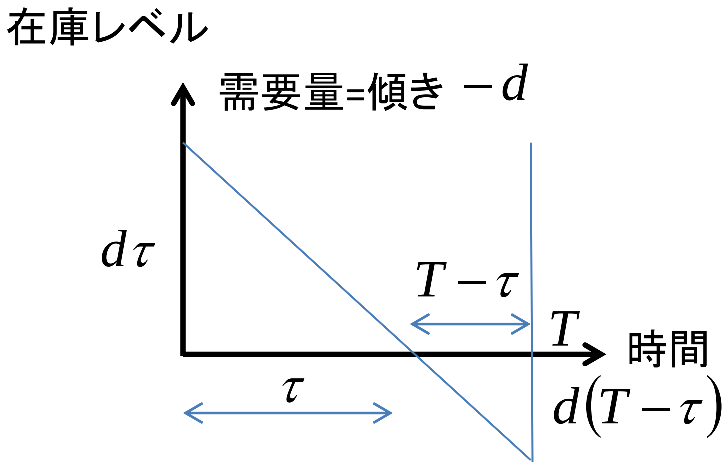
バックオーダーを考慮したモデル

品切れを許さないという仮定を緩和するモデルを考える

通常在庫切れは望ましくないが, **発注費用**, **在庫費用**, **品切れの際に顧客に支払う費用**の関係によっては意図的に品切れさせた方が総費用が安くなる可能性がある.

このとき待機状態にある顧客需要を**バックオーダー**という.

品切れ品目1個あたりの品切れ費用を b とする. また在庫が0になるまでの時間を τ とする.



在庫費用 $d\tau * \tau / 2 * h = \dfrac{hd\tau^2}{2}$

品切れ費用 $(T-\tau) * d(T-\tau) / 2 * b = \dfrac{bd(T-\tau)^2}{2}$

発注費用 K

単位時間当たりの総費用は τ と T の関数として下のように書ける.

$$f(\tau, T) = \frac{K}{T} + \frac{hd\tau^2}{2T} + \frac{bd(T-\tau)^2}{2T} \quad (3.5)$$

バックオーダーを考慮したモデル

$$f(\tau,T)=\frac{K}{T}+\frac{hd\tau^2}{2T}+\frac{bd(T-\tau)^2}{2T} \quad (3.5)$$

$$\partial^2 f/\partial\tau^2=\frac{hd}{T}+\frac{bd}{T}>0 \qquad \partial^2 f/\partial T^2=\frac{2K}{T^3}+\frac{hd\tau^2}{T^3}+\frac{bd\tau^2}{T^3}>0$$

$$\partial^2 f/\partial\tau\partial T=\partial^2 f/\partial T\partial\tau=-\frac{hdr+bd\tau}{T^2}$$

このとき関数 f のヘッセ行列の行列式は $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\tau^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial\tau\partial T}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial T\partial\tau} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial T^2}\end{vmatrix}=\dfrac{2(b+h)dK}{T^4}>0$

よってヘッセ行列は正定値であり, 最適値は1階偏微分した式を0とおいて解けばよい

$$\partial f/\partial\tau=0\rightarrow\tau=\frac{b}{b+h}T \quad (3.6)$$

式(3.6)より品切れ費用 b を大きくしていくと τ は T に近づいていく→品切れを許さなくなる

$\omega=\dfrac{b}{b+h}$ とする.このとき明らかに $0\le\omega\le1$ である.

バックオーダーを考慮したモデル

$\partial f / \partial T = 0$ とし, 式(3.6)を代入しτ を消去した式を解くと式(3.7)のようになる

$$T^* = \sqrt{\frac{2K}{hd\omega}} \qquad (3.7)$$

最適費用は式(3.8)で表される.

$$\sqrt{2Khd\omega} \qquad (3.8)$$

また最適発注量は式(3.9)で表される.

$$Q^* = dT^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h\omega}} \qquad (3.9)$$

Harrisのモデルのときの最適費用は $\sqrt{2Khd}$, 最適発注量は $\sqrt{\frac{2Khd}{h\omega}}$ である.

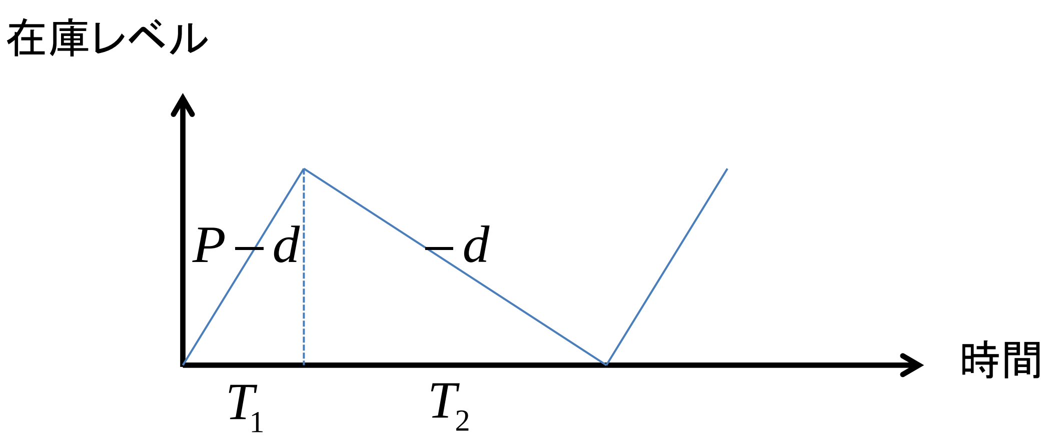
$\omega = 1$ のときがHarrisのモデルと一致し, $\omega < 1$ のとき総費用は減少し, 発注量は増加することがわかる.

生産を考慮したモデル

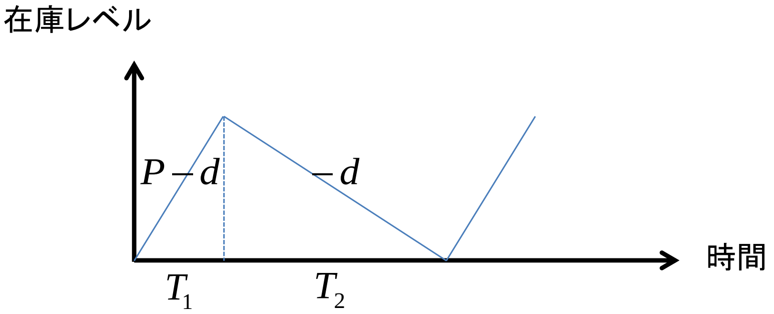
経済ロットスケジューリングモデル

工場内における生産ロットサイズの最適化問題のこと.小売店の品目発注のモデルを拡張することで同様に考えることができる.

つまり, 需要が一定の速度 d で消費され, 品目が一定の速度 P で生産される(在庫補充に値する)と仮定し, 生産をやめて再び開始する(発注に値する)ときには固定費 K がかかるときに最適な生産量(在庫発注量に値する) Q^* を求める問題である.また, 生産開始から次の生産開始までの時間をサイクル時間 T とし, 生産中の時間 T_1 と生産停止中の時間 T_2 に分ける.



生産を考慮したモデル



サイクル時間内における総生産量 Q は

$$Q = PT_1$$

生産を停止したときの在庫量(=最大在庫量)は

$$(P-d)T_1 = (P-d)\frac{Q}{P}$$

サイクル時間内の在庫費用は $\frac{1}{2}hT(P-d)\frac{Q}{P} = \frac{1}{2}ThQ\left(1-\frac{d}{P}\right)$

したがって単位時間あたりの総費用(生産開始費用+在庫費用)は $\frac{K}{T} + \frac{hQ}{2}\left(1-\frac{d}{P}\right)$

Harrisのモデルの単位時間当たり総費用式(3.2) $\frac{K}{T} + \frac{hQ}{2}$ と見比べると

h を $h(1-d/P)$ で置き換えたモデルに他ならないことがわかる. $h' = h(1-d/P)$ とすると

$Q^* = \sqrt{\frac{2Kd}{h'}}$ であり, 最適サイクル時間は $T^* = \sqrt{\frac{2K}{h'd}}$ である.

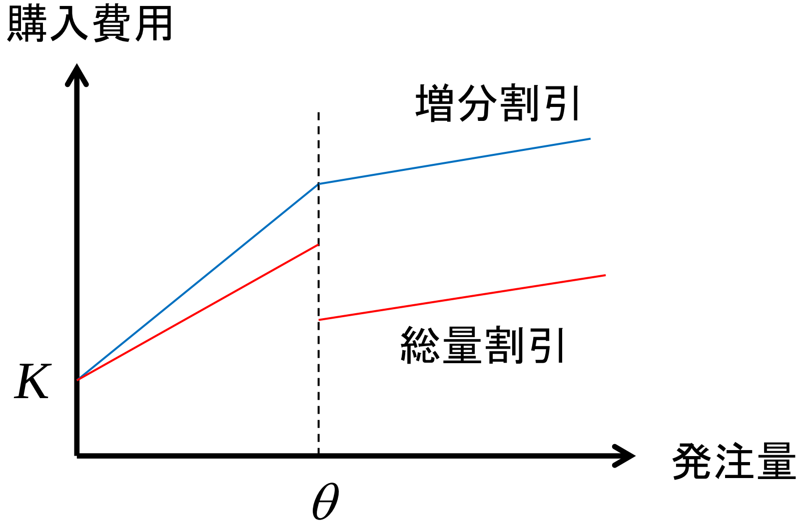
つまり, 生産速度を考慮するときは在庫保管費用を生産速度と需要速度の比だけ割り引いて勘定すればよいことを意味している.

数量割引を考慮したモデル

大量に注文をすると割引が発生することがある.特に輸送では規模の経済性が働く.

〇**増分割引**　・・・一定量を超えると超えた分だけ単位当たりの購入費用が割引される

〇**総量割引**　・・・一定量を超えると一度に購入した全ての量に対して割引がされる



増分割引

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & Q = 0 \\ K + c_0 Q & 0 < Q \le \theta \\ K + c_0\theta + c_1(Q - \theta) & \theta < Q \end{cases}$$

総量割引

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & Q = 0 \\ K + c_0 Q & 0 < Q \le \theta \\ K + c_1 Q & \theta < Q \end{cases}$$

K :発注固定費用

c_0 :発注量がθ 以下のときのの1品目当たりの費用

c_1 :発注量がθ より大きいときの1品目当たりの費用

増分割引

一定量 Q をサイクル時間 T ごとに発注するものとする.またこのとき需要は $d=Q/T$

このときの単位時間当たりの購入費用は $\dfrac{c(Q)}{T}=\dfrac{c(Q)d}{Q}$

在庫費用については購入に対する利子とその他のハンドリング費用, 陳腐化費用を分割

在庫費用=購入費用の利子+$\underbrace{\text{在庫保管費用}}_{h}$とする.

発注固定費用を除いた分は $c(Q)-K$ であるので, 単位数量当たりの(純粋な)購入費用は $(c(Q)-K)/Q$ である. 利子率を r とすると, 単位在庫あたりの金利負担は $r(c(Q)-K)/Q$

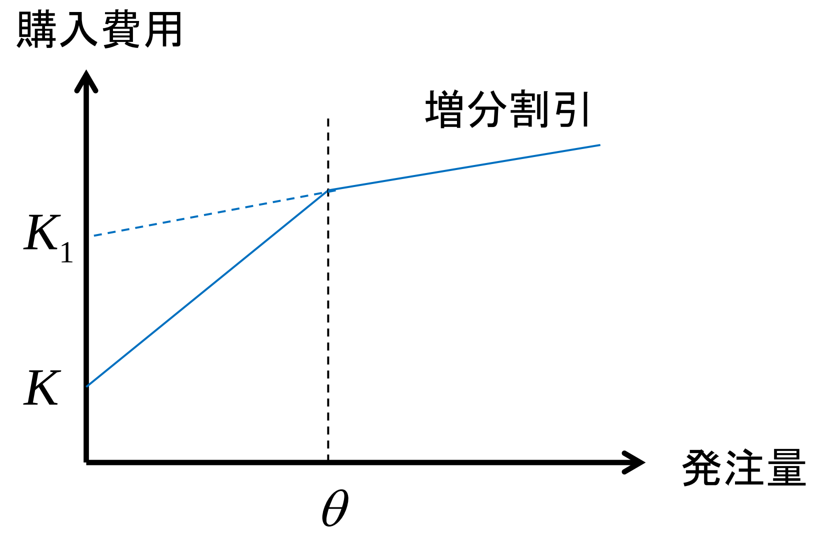
従って在庫費用は $\dfrac{1}{2}(h+r(c(Q)-K))QT$ なので, 単位時間あたりの費用関数 $f(Q)$ は

$$f(Q)=\frac{c(Q)d}{Q}+\frac{1}{2}(h+r(c(Q)-K))Q$$ となる.

$$c(Q)=\begin{cases}0 & Q=0\\ K+c_0Q & 0<Q\le\theta\\ K+c_0\theta+c_1(Q-\theta) & \theta<Q\end{cases}$$

増分割引

割引増分の購入費用関数 $c(Q)$ は以下のように2本の直線の小さいほうと表現できる.



$$c(Q) = \min\begin{cases} K + c_0 Q \\ K_1 + c_1 Q \end{cases}$$

ただし, $K_1 = K + (c_0 - c_1)\theta$,$c_0 > c_1$ である.

それぞれの直線に対する問題は簡単に解ける.

例えば $c(Q) = K_1 + c_1 Q$ の場合は

$$f(Q) = dc_1 + \frac{dK_1}{Q} + \frac{1}{2}(h + rc_1)Q$$

Q で微分して0とおいて $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2dK_1}{h + rc_1}}$

$c(Q) = K_0 + c_0 Q$ の場合も同様にして $Q_0^* = \sqrt{\dfrac{2dK}{h + rc_0}}$

$f(Q_0^*)$ と $f(Q_1^*)$ を比較して小さい方を選択すればよい

総量割引

発注量 Q が分岐点 θ を超えると購入単価が c_0 からc_1 $(c_0 > c_1)$ に全て割引される

$$c(Q) = \begin{cases} 0 & Q = 0 \\ K + c_0 Q & 0 < Q \le \theta \\ K + c_1 Q & \theta < Q \end{cases}$$

増分割引のときと同様にそれぞれの関数での最適発注量を求める.

$c(Q) = K + c_1 Q$ のときの最適発注量 $Q_1^* = \sqrt{\dfrac{2dK}{h + rc_1}}$ が θ 以上のときには Q_1^* が最適

$Q_1^* < \theta$ のときには, $c(Q) = K + c_0 Q$ のときの最適発注量 $Q_0^* = \sqrt{\dfrac{2dK}{h + rc_0}}$

と発注量がθ のときの総費用を比べて小さいほうを選択すればいい

3章　まとめ

〇在庫管理における最適発注量モデルについて扱った

--仮定を設けることで, 簡単な非線形最適化問題として定式化し最適解を求解した.

--仮定を緩和することでモデルを拡張した