久保幹雄, ロジスティックスの数理, 共立出版, 2007.

第4章　最短路の数理(p.94-117)

第5章　在庫の数理(p.118-154)

第6章　配送計画の数理(p.155-184)

理論輪読会

2014/6/21(土)

浦田　淳司

第5章　在庫の数理

5.1 導入：新聞売り子モデル → 5.2 基在庫方策(多段階モデル)

5.3 動的計画 →

↓

5.4 基在庫方策の最適性

5.1 新聞売り子モデル (newsboy model)

h : 新聞1刊の売れ残りの在庫費用
b : 新聞1刊が品切れしたときの品切れ費用
D : 新聞の需要量を表す確率変数（F(x)=Pr{D≦x}, f(x)=$\partial F(x)/\partial x$）

仕入れ量がsのときの総費用の期待値C(s)

$$C(s) = E\left[h \max(s - D, 0) - b \min(0, s - D)\right]$$

$$= h\int_0^s (s - x) f(x) dx + b\int_s^\infty (x - s) f(x) dx$$

$$\frac{\partial C(s)}{\partial s} = hF(s) - b(1 - F(s))$$

$$\frac{\partial^2 C(s)}{\partial s^2} = (h + b) f(s) > 0$$

C(s)を最小にするs* (品切れを起こさない確率F(s*): 臨界率)

$$F(s^*) = \frac{b}{b + h}$$

5.2 実在庫モデル(多段階モデル) (1/2)

直列多段階モデル

上流 十分な在庫 n → … → i+1 → i → i-1 → … → 3 → 2 → 1 下流 需要側

iの実在庫$I_i'(t)$

Definition

$B_i'(t)$: iのバックオーダ（受注を受けたが在庫がないため，満たせなかった量）

$IN_i'(t)$: iの正味在庫　　$IN_i'(t) = I_i'(t) - B_i'(t)$

$IO_i\ (t)$: iの注文中かつ未着の在庫量

$IT_i\ (t)$: iの輸送中在庫量　　$IO_i(t) - IT_i(t) = B'_{i+1}(t)$

$IOP'_i\ (t)$: iの在庫発注ポジション　　$IOP'_i(t) = IN'_i(t) + IO_i(t)$

$ITP'_i\ (t)$: iの在庫輸送ポジション　　$ITP'_i(t) = IN'_i(t) + IT_i(t)$

実在庫モデル(多段階モデル) (2/2)

Definition

L_i': iのリード時間（発注から到着の時間差）　※不確実な場合もあり
D(s,t] : 時刻sからtまでに発生する需要量を表す確率変数
※ 需要は最下流の地点1でのみ発生
s_i' : 基在庫レベル，常に在庫発注ポジション$IOP_i'(t)$をs_i'を保つように行う
b : 単位時間単位バックオーダあたりの品切れ費用（点1でのみかかる）
h_i' : 単位時間単位在庫あたりの在庫保管費用

在庫フロー保存式

$$IN_t'(t+L_i') = ITP_i'(t) - D(t, t+L_i']$$

$$IO_i(t) - IT_i(t) = B'_{i+1}(t)$$
$$IOP'_i(t) = IN'_i(t) + IO_i(t)$$
$$I\mathrm{TP}'_i(t) = IN'_i(t) + IT_i(t)$$
$$IOP'_i(t) = s'_i \text{ より}$$

$$IN_t'(t+L_i') = s_i' - B_{i+1}'(t) - D(t, t+L_i']$$

需要は時間一定，$B_i'(t) = -\min\{0, IN_i'(t)\}$より，下記の通り，基在庫レベルに対する

$$\mathrm{B}_{n+1}' = 0$$
$$B_t'(t) = -\min\{0, s_i' - B_{i+1}'(t) - D_i\}$$

バックオーダ量を上から順に計算できる

エシェロン在庫モデル(1/3)

最適な基在庫レベルを明らかにしたい

Definition　iのエシェロン在庫$I_i\ (t)$　$I_i\ (t)=I_i'(t)+\sum_{j<i}\{IT_j+I_j'(t)\}$

※ 下流のすべての実在庫と輸送中在庫を加えたもの

B(t)：システム全体のバックオーダ量．点1のバックオーダ量と一致.

$IN_i\ (t)$：iにおける正味エシェロン在庫　$IN_i(t)=I_i(t)-B(t)$

$IOP_i\ (t)$：iにおけるエシェロン在庫発注ポジション　$IOP_i(t)=IN_i(t)+IO_i\ (t)$

$ITP_i\ (t)$：iにおけるエシェロン在庫輸送ポジション　$ITP_i(t)=IN_i(t)+IT_i\ (t)$

s_i　：iにおけるエシェロン基在庫レベル$IOP_i\ (t)$を常に保つように発注

h_i　：iにおけるエシェロン在庫費用　$h_i=h'_i-h'_{i+1}$

※下流側ほど品目の価値は上昇するため，$h'_i\geq h'_{i+1}$

エシェロン在庫のフロー保存式

$$IN_i\ (t+L_i')=ITP_i\ (t)-D(t,t+L_i']$$

i+1番目に在庫ある場合は，$IO_i(t)=IT_i(t)$ となり，エシェロン在庫輸送ポジションはs_i となる.

i+1番目に在庫ない場合は，$IN_{i+1}(t)$は，エシェロン在庫輸送ポジションと一致.

$$ITP_i\ (t)=\min\{s_i,IN_{i+1}(t)\}$$

$$ITP_n\ =s_n$$

$$IN_i\ =ITP_i\ -D_i \qquad ITP_i\ =\min\{s_i,IN_{i+1}\}$$

エシェロン在庫モデル(2/3)

最適な基在庫レベルを明らかにしたい

最適化の目的関数
(在庫費用の最小化)
(実在庫，輸送中在庫，バックオーダ)

実在庫 $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i' I_i' + \sum_{i=2}^{n} h_i' IT_{i-1} + bB_1'\right]$

エシェロン在庫 $\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i IN_i + (b + h_1')B\right]$

一致

$\bar{C}_i$ ：$i+1$での正味エシュロン在庫量がxのときのi までの最小費用
$\widehat{C}_i$ ：iでの正味エシュロン在庫量がxのときのi までの最小費用
C_i：iでのエシュロン在庫輸送ポジションがyのときのi までの最小費用

$\overline{C_0}$ ：第0段階にある仮想在庫の最小費用
第0段階では在庫費用はかからないとして，バックオーダ費用だけを考える

$$\overline{C_0}(x) = (b + h_1')(-\min(0, x))$$

xが負のときだけ，バックオーダ量が発生

Cの定義より， $\widehat{C}_i(x) = h_i x + \bar{C}_{i-1}(x)$

エシェロン在庫のフロー保存則（$IN_i = ITP_i - D_i$）より

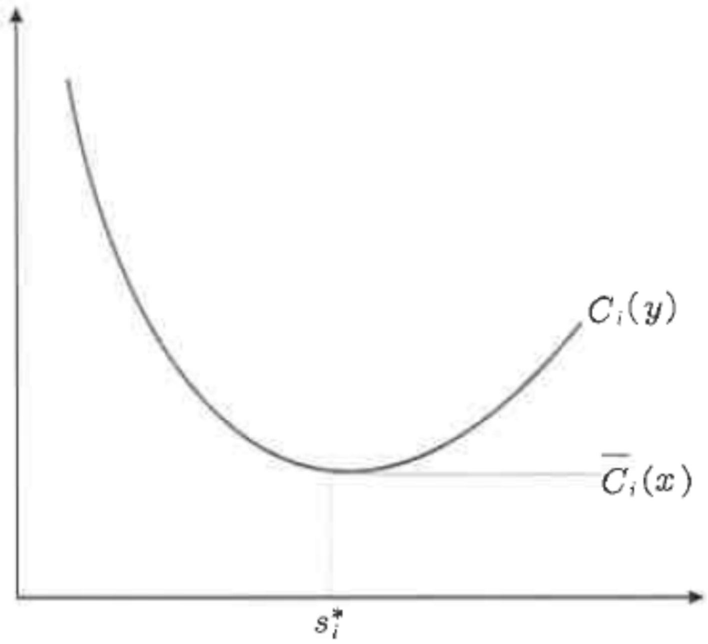
$$C_i(y) = E\left[\widehat{C}_i(y - D_i)\right]$$

エシェロン在庫モデル(3/3)

最適な基在庫レベルを明らかにしたい

エシェロン在庫レベルs*が与えられているとする
在庫フロー保存則（$ITP_i \quad = \min\{s_i, IN_{i+1}\}$ ）より

$$\overline{C_i}(x) = C_i(\min\{s_i^*, x\})$$



$$s_i^* = \operatorname{argmin} C_i(y)$$

下流から順次計算することで求める
※ 上流側のレベルが下流側よりも小さくならないように工夫

5.3 離散時間動的システム

Definition

$t \in \{0,1,..,T\}$

$x_t \in S_t$:システムの状態

$u_t \in U_t(x_t) \subseteq C_t$:意思決定変数

$w_t \in W_t$:需要量(確率的に与える, $\mathrm{P}_t(w_t \mid x_t, u_t)$)

$\mathrm{g}_t(\mathrm{x}_t, \mathrm{u}_t, \mathrm{w}_t)$:費用(確率変数)

離散時間動的システム　$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_t), \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$

総費用の期待値　$E\left[g_T(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, u_t, w_t) \right]$

方策$\pi = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{T-1})$を与え

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t(x_t), w_t), \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$$

x_t,w_tの確率分布が定まり，総費用の期待値が定まる

$$J_\pi(x_0) = E\left[g_T(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) \right]$$

動的計画問題の目的　$J_{\pi^*}(x_0) = \min J_\pi(x_0)$　を満たすπ^*を求める

最適性の原理 (1/2)

動的計画の最適方策を次とする． $\pi^* = (\mu^*_0, \mu^*_1, \ldots, \mu^*_{T-1})$

i期から最終期までの費用の期待値 $E\left[g_T(x_T) + \sum_{t=i}^{T-1} g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) \right]$

を最小にする動的計画問題を考える．

もとの問題の最適方策のi期以降の部分 $\pi^* = (\mu^*_i, \mu^*_{i+1}, \ldots, \mu^*_{T-1})$

が最適解となる．

定理5.1

初期状態x_0の動的計画問題の最適値$J^*(x_0)$は次のアルゴリズムで得られる$J_0(x_0)$と一致．

初期条件 $J_T(x_T) = g_T(x_T)$ からはじめて，次の再帰方程式を適用 (t=T-1,T-2,⋯,1,0)

$$J_t(x_t) = \min_{u_t} E\left[g_t(x_t, u_t, w_t) + J_{t+1}(f_t(x_t, u_t, w_t)) \right] \qquad (5.9)$$

(5.9)を最小にする $u_t^* = \mu_t^*(x_t)$ から最適方策 π^* を構成する

最適性原理 (2/2)

定理5.1の証明（帰納法）

期t, 状態x_tからT期までの総費用の期待値の最小化する動的計画問題の最適値$J_t^*(x_t)$

$$J_t^*(x_t) = \min_{\pi^t} E\left[g_T(x_T) + \sum_{i=t}^{T-1} g_t(x_i, \mu_i(x_i), w_i) \right]$$ と定義する.

t+1期で次が成立　$J_{t+1}^*(x_{t+1}) = J_{t+1}(x_{t+1})$

t期

$$\begin{aligned}
J_t^*(x_t) &= \min_{\pi^t} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t,\ldots,w_{T-1}} \left[g_T(x_T) + \sum_{i=t}^{T-1} g_t(x_i, \mu_i(x_i), w_i) \right] \\
&= \min_{(\mu_t,\pi^{t+1})} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t,\cdots,w_{T-1}} \Bigg[g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) + g_T(x_T) \\
&\qquad + \sum_{i=t+1}^{T-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), w_i) \Bigg] \\
&= \min_{\mu_t} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \Bigg[g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) \\
&\qquad + \min_{\pi^{t+1}} \mathop{\mathrm{E}}_{w_{t+1},\cdots,w_{T-1}} \left[g_T(x_T) + \sum_{i=t+1}^{T-1} g_t(x_i, \mu_i(x_i), w_i) \right] \Bigg] \\
&= \min_{\mu_t} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \left[g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) + J_{t+1}^*(f_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t)) \right] \\
&= \min_{\mu_t} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \left[g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) + J_{t+1}(f_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t)) \right] \\
&= \min_{u_t \in U_t(x_t)} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \left[g_t(x_t, u_t, w_t) + J_{t+1}(f_t(x_t, u_t, w_t)) \right] \\
&= J_t(x_t)
\end{aligned}$$

g_tを分離

確率需要部分を分離

定義を利用

t+1期の等式

(5.9)

最適停止問題 (1/2)

Definition

w_t：t期の資産の価値(確率変数)

x_t： t期のシステムの状態；1~t-1期で売却しているときは x_t=終,
それ以外は前期の資産価値 $x_t = w_{t-1}$

u_t： t期の意思決定変数 (売or非売)

r： 利子率

最終期Tにおける総利益の期待値 $E\left[g_T(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, \mu_t, w_t) \right]$

$$x_{t+1} = \begin{cases} \text{終}, & x_t = \text{終 もしくは } u_t = \text{売 のとき} \\ w_t, & \text{それ以外} \end{cases} \qquad t = 0, 1, 2, \cdots, T-1$$

システムの状態

$$g_T(x_T) = \begin{cases} x_T, & x_T \neq \text{終 のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

最終期には売却

$$g_t(x_t, u_t, w_t) = \begin{cases} (1+r)^{T-t} x_t, & x_t \neq \text{終 かつ } u_t = \text{売 のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

売却益

最適停止問題 (2/2)

最適停止問題の動的計画アルゴリズム

初期条件 $J_T(x_T) = \begin{cases} x_T, & x_T \neq 終 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

再帰的に適用

$$J_t(x_t) = \begin{cases} \max\{\underbrace{(1+r)^{T-t}x_t}_{\text{売却}}, \underbrace{\mathrm{E}\left[J_{t+1}(w_t)\right]}_{\text{売却しない}}\}, & x_t \neq 終 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

無限期間動的計画問題

無限期間の期待費用の最小化問題

$$J_\pi(x_0) = \lim_{T\to\infty} \mathop{E}_{w_0,w_1,\cdots} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t g_t(x_t, \mu_t(xt), w_t) \right]$$

$0 \leq \alpha \leq 1$: 割引率

代表的な無限期間動的計画問題

1. 確率的最短経路問題
   α=1とし，他の状態に移動しない終端状態を設定(終端→終端は費用0)
2. 割引を伴う動的計画問題
   α<1．期待費用が∞になるのを避けるため，|g|が有界と仮定
3. 平均費用動的計画問題
   費用関数を次とおく．1期あたりの平均期待費用を最小化.

$$J_\pi(x_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathop{E}_{w_0,w_1,\cdots} \left[\sum_{t=0}^{T-1} g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t) \right]$$

推移確率と期待費用

$p_{ij}(u)$: 状態iから状態jへの推移確率

$\tilde{g}(i,u,j)$: 状態iからuを行って，状態jに推移したときの費用

期待費用　$g(i,u) = \sum_j p_{ij}(u) \tilde{g}(i,u,j)$

再帰方程式の収束性 (1/2)

仮定5.1
確率的最短経路問題に対して，任意の初期状態及び任意の許容方策に対して，
m期の移動の後に終端状態に達していない確率が1未満になる有限な正数mが存在する．

定理5.2 (再帰方程式の収束性)

仮定5.1の下で，$J_0(i) = 0, i \in \{1,2, \dots, n\}$を初期条件とした動的計画の再帰方程式

$$J_{t+1}(i) = \min_{u \in U(i)} \left\{ g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(u) J_t(j) \right\} \quad (5.10)$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n$$

により，生成された列$J_t(i), t = 1,2, \dots$は最適値$J^*(i)$に収束する．

(証明)　初期状態x_0，任意の正の定数K

$$J_\pi(x_0) = \lim_{T \to \infty} \mathop{\mathrm{E}}_{w_0, w_1, \cdots} \left[\sum_{t=0}^{T-1} g(x_t, \mu_t(x_t)) \right]$$

$$= \mathop{\mathrm{E}}_{w_0, w_1, \cdots, w_{mK-1}} \left[\sum_{t=0}^{mK-1} g(x_t, \mu_t(x_t)) \right] \quad \text{m}K\text{期までの期待費用}$$

$$+ \lim_{T \to \infty} \mathop{\mathrm{E}}_{w_{mK}, w_{mK+1}, \cdots} \left[\sum_{t=mK}^{T-1} g(x_t, \mu_t(x_t)) \right] \quad \text{m}K\text{期以降の期待費用}$$

これが0に漸近していることを示す

再帰方程式の収束性 (2/2)

(証明つづき)

m期間の費用の上界M $M = m \max_{i \in \{1,2,\cdots,n\}, u \in U(i)} |g(i,u)|$ (m期間) ×(gの上界)

仮定5.1より，mk期に終端状態に達していない確率ρ^{K} $(\rho < 1)$

m期ごとに区切って考えると，期待費用は$M\rho^{\mathrm{K}}, M\rho^{\mathrm{K}+1}, M\rho^{\mathrm{K}+2}, \ldots$でおさえられるので，

$$\left| \lim_{T\to\infty} \mathop{\mathrm{E}}_{w_{mK}, w_{mK+1}, \cdots} \left[\sum_{t=mK}^{T-1} g(x_t, \mu_t(x_t)) \right] \right| \le M \sum_{k=K}^{\infty} \rho^k = \frac{M\rho^K}{1-\rho} \to 0 \ (K\to\infty)$$

$\mathrm{J}_{mK}(i)$ Kを十分大きな正数とすると，最適値$J^*(i)$に漸近する

定理5.3　仮定5.1の下で，初期状態iおよび定常方策μを与えた確率的最短経路問題に対して，次が成立する．

（定常方策に対するベルマン方程式）

定常方策μに対する期待費用$J_\mu(i)$は以下の方程式の唯一の解である．

$$J_\mu(i) = g(i, \mu(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu(i)) J_\mu(j) \qquad (5.12)$$

価値反復法 (value iteration method)

$$J_{t+1}(i) = \min_{u \in U(i)} \left\{ g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(u) J_t(j) \right\}$$

(5.10) を用いた最適値を算出するアルゴリズム

価値反復法

初期条件　$J_0(i) = 0,\ \forall i = 1,2,\dots,n$　の下で，以下で反復を行う.

$$J_{t+1}(i) = \min_{u \in U(i)} \left[g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(u) J_t(j) \right], \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

定理5.2より，反復により生成された列$J_t(i), t = 1,2,\dots,n$は最適値$J^*(i)$に収束する.
ただし，一般には無限の反復を要する.

方策反復法 (policy iteration method)

$$J_{t+1}(i) = \min_{u \in U(i)} \left\{ g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(u) J_t(j) \right\}$$ 定理5.2 (5.10) と

$$J_\mu(i) = g(i, \mu(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu(i)) J_\mu(j)$$ 定理5.3 (5.12) を用いた最適値を算出するアルゴリズム

方策反復法

tでの方策μ_tとし，初期条件$J_0(i) = 0$, 初期方策μ_0から出発し，
全てのiに対して，$J_{\mu_{t+1}}(i) = J_{\mu_t}(i)$となるまで，次のステップを繰り返す

方策評価ステップ

$J(i)$を未知変数とした，次の線型方程式を解き，解を$J_{\mu_t(i)}(i)$とする

$$J(i) = g(i, \mu_t(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu_t(i)) J(j) \qquad (5.14)$$

方策改善ステップ

評価ステップの解$J_{\mu_t(i)}(i)$をもとに，t+1をもとに，方策$\mu_{t+1}(i)$を求める

$$\mu_{t+1}(i) = \operatorname*{argmin}_{u \in U(i)} \left[g(i,u) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(u) J_{\mu_t(j)}(j) \right] \qquad (5.15)$$

方策反復法の有限収束性

定理5.4 仮定5.1 の下では，方策反復法は有限の反復回数で終了する

(証明)

任意のtに対して，$J_0(i) = J_{\mu_t(i)}(i)$を初期条件として，k=0,1,2,…に対して

$$J_{k+1}(i) = g(i, \mu_{t+1}(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu_{t+1}(i)) J_k(j), \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

とおく.

まず，(5.14)から

$$J_0(i) = J_{\mu_t(i)}(i) = g(i, \mu_t(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu_t(i)) J_0(j), \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

これは，(5.15)から

$$\begin{aligned} J_0(i) &= g(i, \mu_t(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu_t(i)) J_0(j) \\ &\geq g(i, \mu_{t+1}(i)) + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\mu_{t+1}(i)) J_0(j) = J_{0+1}(i) \end{aligned}$$

よって，$J_0(i) \geq J_1(i)$が成立する．同様に，$J_k(i) \geq J_{k+1}(i)$が得られる.

定常方策の収束性と有限性により，有限解の反復後に最適方策が得られる.

5.4 基在庫方策の最適性 (1/3)

多期間確率的在庫計画モデルの動的システムの構成要素

Definition

I_t: t期の期首の正味在庫量（負の場合はバックオーダ）（動的システムの状態）
q_t: t期の発注量（意思決定変数）
D_t: t期の需要量（確率変数）

離散時間動的システム　$I_{t+1} = I_t + q_t - D_t$

h: 単位あたりの在庫費用
b: 単位あたりの品切れ費用
$C(I_T)$: 最終期(T期)在庫費用 (I_Tに対して凸関数)

期末の在庫がIのときの在庫費用と品切れ費用の和　h max{I,0}+b max{-I,0}

0期からT-1期までの各費用の和の期待値は

$$\mathrm{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(h\max\{I_t+q_t-D_t,0\}+b\max\{D_t-I_t-q_t,0\}\right)\right]+C(I_T)$$

これを最小にする発注方策を求める.

基在庫方策の最適性 (2/3)

$J_t(I_t)$: t期の在庫がItのときのt期以降の期の最小費用

$$J_T(I_T) = R(I_T) = C(I_T)$$

$$J_t(I_t) = \min_{q_t \geq 0} \{H_t(I_t + q_t) + \mathrm{E}[J_{t+1}(I_t + q_t - D_t)]\} \qquad (5.16)$$

$$H_t(y) = h\mathrm{E}[\max\{y - D_t, 0\}] + b\mathrm{E}[\max\{D_t - y, 0\}]$$

$$y_t = I_t + q_t$$

D_t : 同一で独立の分布に従う
$H_t(\cdot)$: 期tに依存しない

$$J_t(I_t) = \min_{y_t \geq I_t} \{H(y_t) + \mathrm{E}[J_{t+1}(y_t - D_t)]\}$$

帰納法を用いて，$J_t(I_t)$のI_tに関する凸性を示す

- 最終期$J_T(I_T)$は凸
- $J_{t+1}(I_{t+1})$が凸であると仮定したうえで，$J_t(I_t)$が凸であることを示す

基在庫方策の最適性 (3/3)

・最終期$J_T(I_T)$は凸
・$J_{t+1}(I_{t+1})$が凸であると仮定したうえで，$J_t(I_t)$が凸であることを示す

関数H(y_t)はy_tに関して凸関数なので，

$$g(y_t) = H(y_t) + \mathrm{E}\left[J_{t+1}(y_t - D_t)\right]$$

g(y_t)はy_tについて，下に凸となる.

$$\lim_{|y_t| \to \infty} g(y_t) = \infty$$

であり，$g(y_t)$を最小にするy_tは有限の値S_tをもつ.

最適方策 $$\mu_t^*(I_t) = \begin{cases} S_t - I_t, & I_t < S_t\text{のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \qquad (5.17)$$

(5.16)を動的計画の再帰方程式に代入

$$J_t(I_t) = \begin{cases} H(S_t) + \mathrm{E}[J_{t+1}(S_t - D_t)], & I_t < S_t\text{のとき} \\ H(I_t) + \mathrm{E}[J_{t+1}(S_t - D_t)], & \text{それ以外} \end{cases}$$

Hの凸性とSが最小値を与えることから，上記の関数も凸となる
また，同時に(5.17)が最適解となる

基在庫方策の最適性 (固定費付加)

発注の固定費用 K
発注量1単位あたりの費用 c
発注量q_t

$$発注費用 = \begin{cases} K, & q_t > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

動的計画の再帰方程式

$$J_t(I_t) = \min \left[\underbrace{H(I_t) + \mathrm{E}\left[J_{t+1}(I_t - D_t)\right]}_{\text{t期に発注しない場合の費用}},\ \underbrace{\min_{y_t > I_t} \left\{K + H(y_t) + \mathrm{E}\left[J_{t+1}(y_t - D_t)\right]\right\}}_{\text{t期に発注した場合の費用}} \right]$$

ここで $g(y_t) = cy_t + H(y_t) + \mathrm{E}\left[J_{t+1}(y_t - D_t)\right]$ が固定費用を考えない場合と同様に凸であることを示せれば，同様の解を得る

最適方策 $\mu_t^*(I_t) = \begin{cases} S_t - I_t, & I_t < s_t \text{のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$

S_tはg(y_t)を最小にするy_tであり，s_tはg(y_t) = K + g(S_t)を満たす最小のy_tとなる

※g(y_t)は一般に凸であるとは限らない.

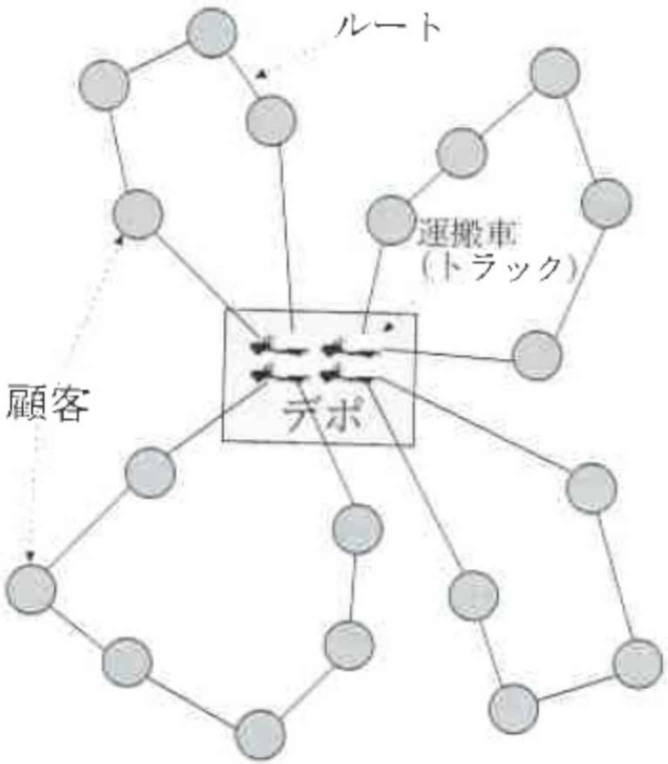
第6章　配送計画の数理

6.1, 6.2 巡回セールスマン問題

6.3 配送計画問題

6.4 セービング法
6.5 ルート先・クラスター後法
6.6 クラスター先・ルート後法

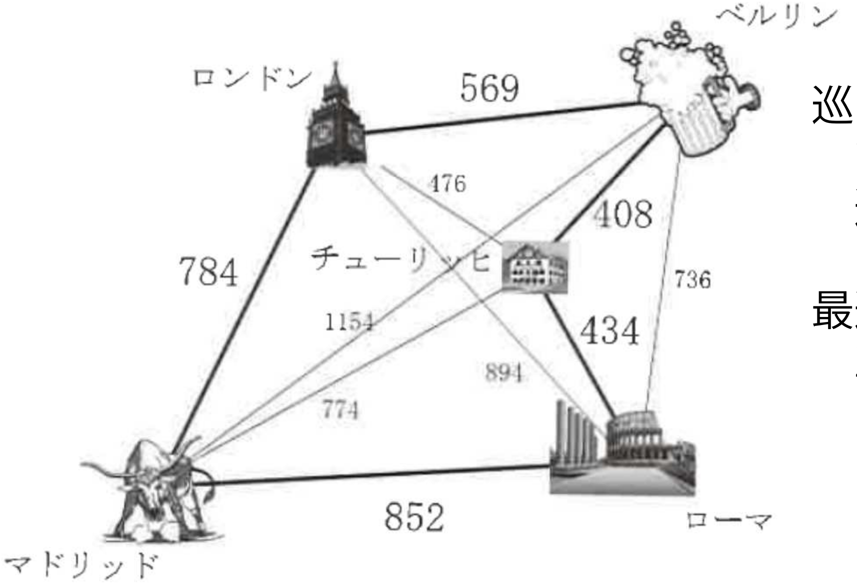
導入1: 配送計画問題



・デポ
・運搬車（種類，積載量）
・顧客（需要，位置）
・リンク（移動時間，移動距離，移動費用）
・ルート（積載量と需要の比較）
・運搬車台数
・運搬車の稼働時間

例：
小売店への配送，スクールバス，郵便・新聞配達，ごみの収集，燃料の配送

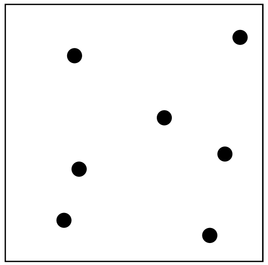
6.1 巡回セールスマン問題とBHH定理



巡回セールスマン問題(Traveling Salesman Problem)
　すべての点をちょうど1回ずつ経由する巡回路で，
　巡回路の長さを最小にするものを求める．

最近では，
　24978都市の問題の最適解（CPU時間　84.8年）

Beardwood - Halton - Hammersley theorem



・単位正方形にランダムにn個の点を分布
・最短巡回路長が$\sqrt{n}$の定数β倍に近づく
　（0.7124倍）

・任意の有界な平面に点が一様かつ独立に分布
・面積Aの領域→$\beta\sqrt{An}$に収束

6.2 巡回セールスマン問題の定式化

ポテンシャル制約u_iの導入

有向グラフG=(V,A)
点集合V
有向枝集合A
枝上の距離関数c
i→jが接続：$x_{ij} = 1$（接続なしは$x_{ij} = 0$）
接続する場合は $u_j = u_i + 1$となる制約を付加

$$\text{minimize} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

経路長最小化

$$\text{subject to} \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \tag{6.4}$$

ひと筆書き

$$\sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in V \tag{6.5}$$

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad \forall i, j \in V \setminus \{1\}, i \neq j \tag{6.6}$$

ポテンシャル制約

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i,j) \in A \tag{6.7}$$

$$1 \leq u_i \leq n-1, \quad \forall i \in V \setminus \{1\} \tag{6.8}$$

ポテンシャル関数の工夫

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j, \quad \forall i, j \in V \setminus \{1\}, i \neq j \qquad (6.6)$$

ポテンシャル制約

$x_{ij} = 1$のとき　$u_i + 1 \leq u_j$

$x_{ij} = 0$のとき　$u_i - n + 2 \leq u_j$

制約が弱いので持ち上げ(lifting)を考える

$$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) + \alpha x_{ji} \leq u_j$$

$x_{ji} = 0$のとき　$u_i + 1 - (n-1)(1 - x_{ij}) \leq u_j$

$x_{ji} = 1(x_{ij} = 0)$のとき　$\alpha \leq u_j - u_i - 1 + (n-1) \leq n - 3$　($u_j + 1 = u_i$より)

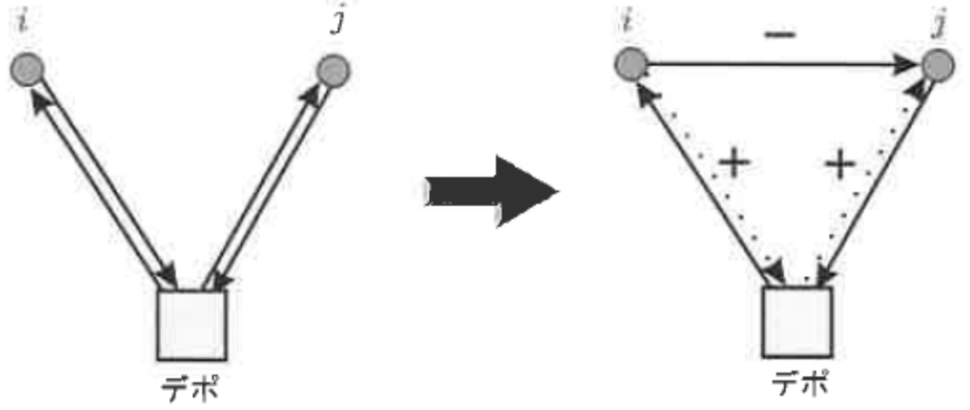
6.3 配送計画問題の用語・定義

- 運搬車K＝{1,2,⋯,m}
- 積載量Q_k
- 顧客，デポN＝{1,2,⋯,n}
- デポ＝ 0
- 顧客N_0
- 顧客i ∈ N_0の需要q_i
- 運搬車kが点iから点jに移動するときの費用c_{ij}^k
- 運搬車台数m

- 移動費用の対称　$c_{ij}^k = c_{ji}^k$
- 三角不等式　$c_{ij}^k \le c_{il}^k + c_{lj}^k$
- 等質　$c_{ij}^k = c_{ij}$
- 等需要　顧客の需要がすべて1で共通
- 時間枠制約　顧客上での作業時刻の制約がある

6.4 セービング法

古典的なメタヒューリスティクスである「貪欲法」に基づくアルゴリズム



セービング値　$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$

1. すべてのijのセービング値を計算
2. セービング値の大きい順に並べたリストを作成
3. ペアi, jをつないだ場合の実行可能性（積載量制約）が失われないなら，つなぐ.
   制約を満たさないなら，リストから削除し，次のペアをつなぐ.

6.5 ルート先・クラスター後法

1. (ルート先) 全顧客をつなぐ全巡回路 ρ を先に決定
2. (クラスター後) 制約条件（積載量，稼働時間）を満たすように巡回路をクラスタ分割

最適分割法

・積載量制約付きの等質配送計画問題

・巡回路の順番を崩さないように最適に分割する

$$C_{ij} = \begin{cases} \text{ルート } (0, \rho(i+1), \cdots, \rho(j), 0) \text{ の費用}, & \sum_{k=i+1}^{j} q_{\rho(k)} \leq Q \text{ のとき} \\ \infty, & \text{それ以外} \end{cases}$$

積載量制約を超える場合

補助定理6.1 (等需要配送計画問題の下界)

等需要配送計画問題をIとする

配送計画問題の最適値OPT(I)

巡回セールスマン問題の最適値TSP(I)

$$\max \left\{ TSP(I), \frac{1}{Q} \sum_{i \in N_0} (c_{0i} + c_{i0}) \right\} \leq OPT(I)$$

(証明)　点集合SのTSPの最適解L(S)

$$OPT(I) = \sum_j L(N_j \cup \{0\})$$

$$\geq \sum_j \max_{i \in N_j} (c_{0i} + c_{i0}) \quad \text{最遠地点の往復}$$

$$\geq \sum_j \sum_{i \in N_0} (c_{0i} + c_{i0}) / |N_j| \quad \text{平均値}$$

$$\geq \sum_j \sum_{i \in N_0} (c_{0i} + c_{i0}) / Q \quad \text{顧客はQ以下}$$

Q-反復分割法

Q-反復分割法
・第1のルートを 0, ρ(1),⋯, ρ(i),0 とする (i=1,2,⋯,Q)
・それ以降のルートを顧客をQ個含むように分ける (最後のルートはQ未満になる可能性)

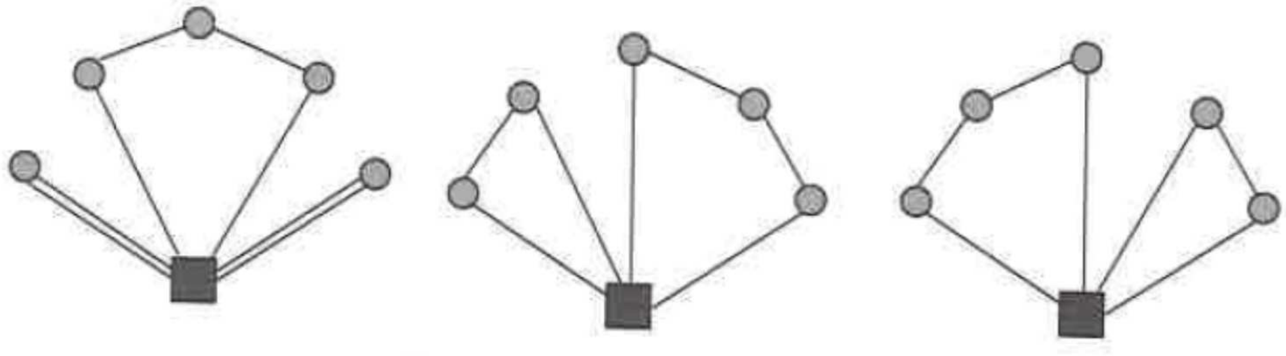


図 6.4　Q-反復分割法．$Q = 3, q_i = 1 \ (i \in N_0)$

Q-反復分割法により得られた解は最適値のr倍以下となるという保証を持つ.

(証明) 得られたQ個の解の総和は，ρの巡回路費用のQ-1倍とデポからの往復費用の和

$$\sum_{i \in N_0} (c_{0i} + c_{i0}) + (Q-1) TSP_r(I)$$

Q分割法の解

$$A_r(I) \le \sum_{i \in N_0} \frac{(c_{0i} + c_{i0})}{Q} + \frac{(Q-1)}{Q} TSP_r(I)$$

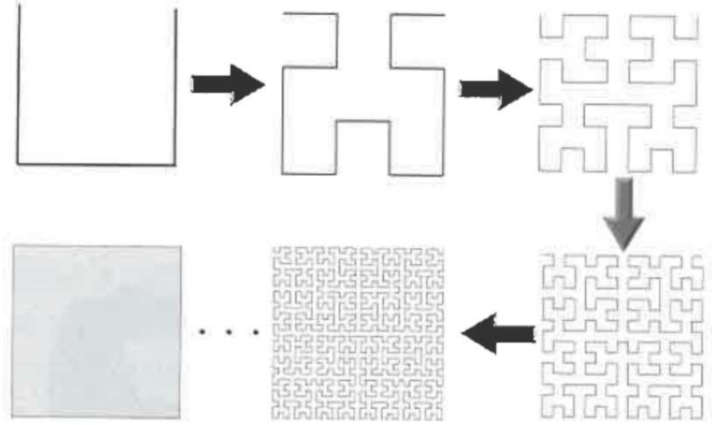
補助定理6.1より

$$\begin{aligned} A_r(I) &\le OPT(I) + \frac{(Q-1)}{Q} TSP_r(I) \\ &\le OPT(I) + \frac{(Q-1)}{Q} r \cdot TSP(I) \\ &\le \left(1 + \left(1 - \frac{1}{Q}\right) r\right) OPT(I) \end{aligned}$$

空間充填曲線法

ルート先・クラスター後法の使い方の例

・空間充填曲線の作成



・配送先の入力

- 配送先のx,y座標を地図から読み取る
- 各地点の空間充填曲線上での位置(θ)を計算
- θの小さい順に並べる

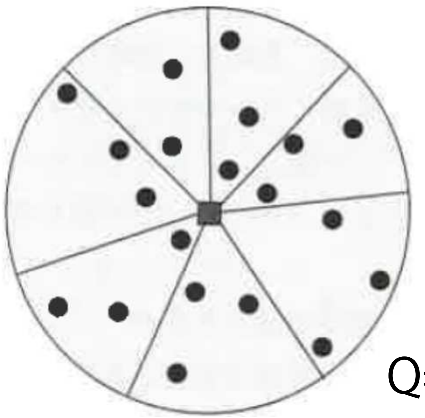
・ルートの決定

- デポから順番に配送先を回り，運搬容量を超えたらデポに戻る

6.6 クラスター先・ルート後法

1. (クラスター先) 顧客をクラスターに分割．クラスター内の顧客の需要量の合計が運搬車の積載容量の上限以下とする
2. (ルート後) クラスター内の顧客とデポを加えた点でTSPを解く

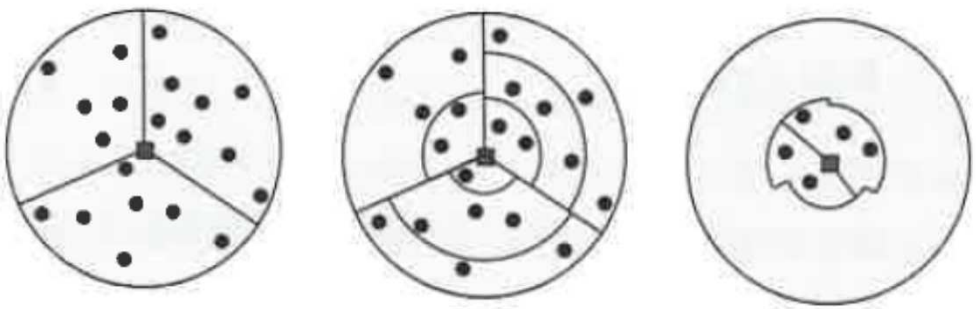
扇形分割法



Q=3の場合

領域を円形に設定
・領域を積載量以下の扇形に分割

円形分割法



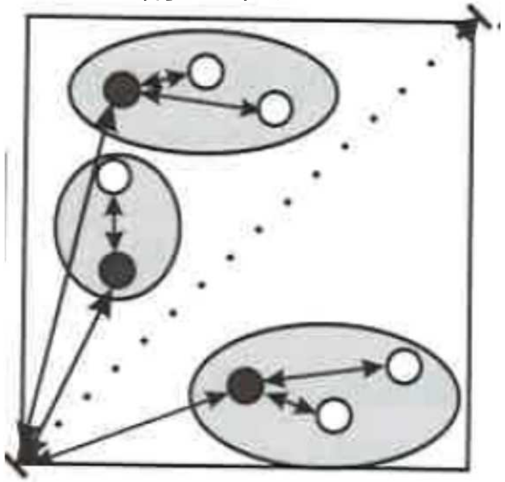
(a) (b) (c)

a) 領域を扇形に等分割
b) 扇形を積載量以下で外側から分割
c) 最も内側の弧をまとめてから，扇形分割

施設配置ヒューリスティクス (1/4)

- 顧客の中からの種点の選択
- 顧客の種点の割り当て（子問題）　として考える

●：種点
○：割り当て



Definition

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{顧客 } j \text{ を種点として採用する} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{顧客 } i \text{ が種点 } j \text{ に割り当てられる} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

Fj : 顧客jを種点としたときの費用　$F_j = c_{0j} + c_{j0}$

Δij：種点jに顧客iを加えた時の費用　$\Delta_{ij} = c_{ij} + c_{ji}$

容量制約付き
集積装置配置問題

$$\text{minimize} \sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_0} \Delta_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N_0} F_j y_j$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j \in N_0} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N_0 \qquad (6.11)$$

顧客の種点
への割り当て

$$\sum_{i \in N_0} q_i x_{ij} \leq Q y_j, \ \forall j \in N_0 \qquad (6.12)$$

クラスタごとの
重量制約

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N_0, \ j \in N_0 \qquad (6.13)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in N_0 \qquad (6.14)$$

施設配置ヒューリスティクス (2/4)

1. (クラスター先) 容量制約付き集積装置配置問題を解くことによって顧客をクラスタ分け
2. (ルート後) 各クラスタにデポを加えた点集合に対するTSPを求める

定理6.6 (Bramel-Simchi-Levi)

顧客数nの問題例Inにおいて，積載量制約付きの等質配送計画問題

1. 2点間の移動費用はユークリッド距離
2. 顧客位置は同一で独立な分布関数をもつ確率変数．デポ-顧客間の平均距離は$\bar{d}$は有限
3. 顧客iの需要量q_iは[0,1]上で任意の同一で独立な分布関数をもつ
4. 運搬車の最大積載量は1

得られる近似値をA(In)とする．
n個のアイテムを重量上限1のビンに詰め込む最小ビン数をBIN*としたとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{BIN}^*}{n} = \gamma$$

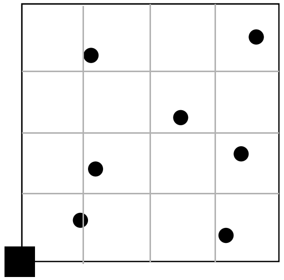
となる定数γ >0が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(I_n)}{n} = 2\gamma\bar{d}$$

が，成立する．

施設配置ヒューリスティクス (3/4)

(証明)



領域を対角線の長さ ε の正方領域に分割し，
分割された小領域で顧客が存在する確率が0に収束しないものをAiとし，Aiに含まれる顧客の集合をNiとする

顧客集合Niの需要量のビンパッキング問題の最適値b_i^*
最適解において，k(≤ b_i^*)番目のビンに含まれる顧客の集合を$B_i\ (k)$と書く
$B_i\ (k)$の任意の点を選択し，種点$s_i\ (k)$とする

$$A(I_n) \le \sum_{i=1}^{t_\epsilon}\sum_{k=1}^{b_i^*}\left\{2c_{0,s_i(k)} + \sum_{j\in B_i(k)} 2c_{s_i(k),j}\right\}$$

任意の種点$s_i\ (k)$とデポの往復＋顧客集合と種点$s_i\ (k)$との往復

$c_{s_i\ (k),j} \le \varepsilon$より，右辺の上界は

$$\sum_{i=1}^{t_\epsilon}\sum_{k=1}^{b_i^*}\{2c_{0,s_i(k)} + 2(|B_i(k)|-1)\epsilon\}$$

小領域Aiで最もデポと近い距離を$d_{min}(i)$とすれば，$c_{0,s_i\ (k)} \le d_{min}(i) + \varepsilon$より

$$A(I_n) \le \sum_{i=1}^{t_\epsilon}\left\{2b_i^* d_{\min}(i) + 2\sum_{k=1}^{b_i^*}|B_i(k)|\epsilon\right\} = 2\sum_{i=1}^{t_\epsilon} b_i^* d_{\min}(i) + 2n\epsilon$$

施設配置ヒューリスティクス (4/4)

(証明つづき)

顧客が小領域A_iに入る確率は0より大きいので，n→∞のとき，$|N_i|$→∞となる

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_i^*}{|N_i|}=\lim_{|N_i|\to\infty}\frac{b_i^*}{|N_i|}=\gamma$$

が成り立ち，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{t_\epsilon}\frac{1}{n}b_i^* d_{\min}(i) &= \limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{t_\epsilon}\frac{1}{n}\frac{b_i^*}{|N_i|}|N_i|d_{\min}(i)\\ &\leq \gamma\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{t_\epsilon}\frac{1}{n}\sum_{i\in N_i}c_{0i}\\ &\leq \gamma\bar{d}\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(I_n)}{n}\leq 2\gamma\bar{d}+2\epsilon$$

ε は任意に小さく取れるため，題意を得る．■

・積載量制約付きの等質配送計画問題はビンパッキング問題と同じ漸近的なふるまいをする
・ビンパッキングを最適に解くことで種点を決める施設配置ヒューリスティクスの最適値に収束する近似解を算出する
・種点の選択の一般化割当法も最適な解を算出する

終