吸収マルコフ過程による交通量配分理論

Theory of Traffic Assignment through Absorbing Process

(佐佐木綱, 吸収マルコフ過程による交通量配分理論, 土木学会論文集，No.121, pp.28-32, 1965.)

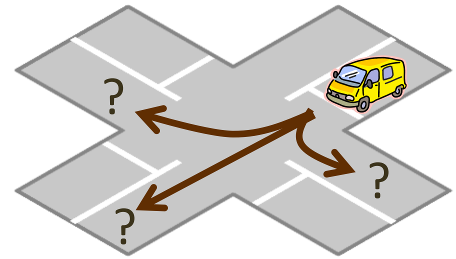
2011.10.16　B4 伊藤 創太

▼目次

1. 概説

●概念

大都市の街路交通を巨視的にみると、各交差点で確率にしたがって方向を変えてながれているように見える

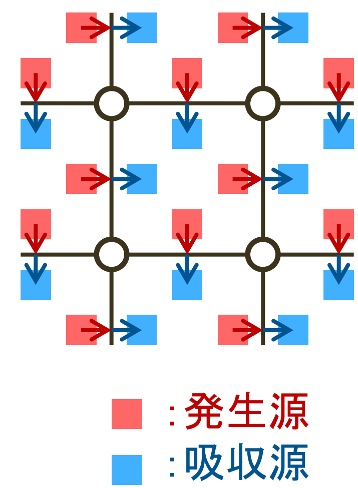


吸収マルコフ連鎖と考えて、交差点間交通量を求める

●仮定・定義

・各車とも同一方向で交差点に進入する場合、直進率・右左折率は同じ
・各交差点間にそれぞれ1つの発生源・吸収源を持つ

発生源：交通量の発生するところ（トリップ開始地点）
吸収源：交通量の吸収するところ（トリップ終了地点）
発生交通量：単位時間に各発生源から発生する車の数
吸収交通量：単位時間に各発生源が吸収する車の数



2. 吸収マルコフ連鎖の性質

●遷移確率と通過交通量

シャノン線図によって遷移確率を与える

吸収的状態がr個、非吸収的状態がs個の場合、遷移確率行列を標準形で配置する

吸収状態を表す(r×r行列)

$$P = \left(\begin{array}{c:c} \boxed{I} & 0 \\ \hdashline R & \boxed{Q} \end{array}\right)$$

非吸収状態を表す(s×s行列)

一般にQに対して以下の関係式が成立

$$I + Q + Q^2 + \cdots = \boxed{(I-Q)^{-1}}$$

吸収マルコフ連鎖の基本行列

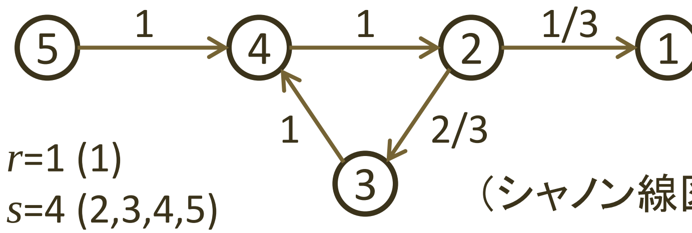
→q_{ij}はiを出た1台の車がjを通る回数の期待値を表す

各地点の発生交通量をu_iで表すと、各地点の通過交通量は、

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_s \end{pmatrix}(I-Q)^{-1}$$

で表される

（例）



r=1 (1)

s=4 (2,3,4,5)

（シャノン線図）

$$\begin{array}{cc} & I \\ P = & \left(\begin{array}{c:cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1/3 & 0 & \boxed{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) Q \end{array}$$

2から3への遷移確率(2/3)を表す

$$(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & \boxed{3} & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

地点3を通った車が地点4を通過する回数の期待値は3

地点5から毎時5台出発するとすると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{15} & 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

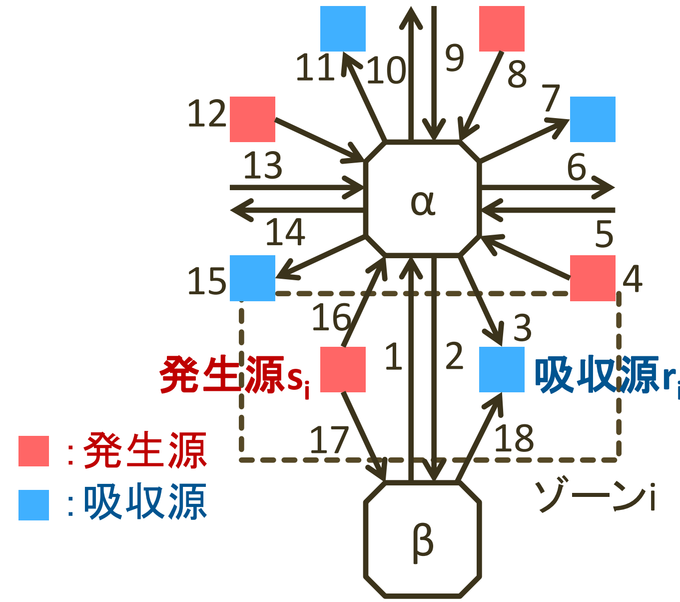
地点2の通過交通量

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

●モデル

1つの十字路で16の過渡状態が考えられる
発生源数=吸収源数=*r*とすると、(*s*-*r*)個の過渡状態（交差点）があるとできる

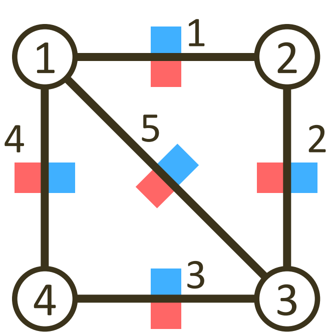
右の例の場合
r=4（吸収的状態：4つの吸収源）
s=6（非吸収的状態：*α*・*β*・4つの発生源）
過渡状態2つ（ *α*・*β* ）



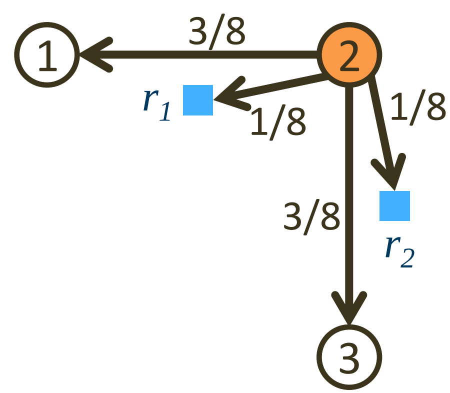
（例）

4つのノードと5つのリンクを例として考える
各リンクに発生源・吸収源
各交差点から各方面への遷移確率は等配分、吸収率1/4

ネットワーク



遷移確率例



3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

吸収交通量は

	吸収源					発生源					交差点（過渡状態）				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	1	2	3	4	
$P=$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_1
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_2
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_3
	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_4
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r_5
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.500	0	0	0.500	s_1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.500	0.500	0	0	s_2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.500	0.500	0	s_3
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.500	0.500	s_4
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.500	0	0.500	0	s_5
	0.083	0.083	0	0	0.083	0	0	0	0	0	0	0.250	0.250	0.250	1
	0	0.125	0.125	0	0	0	0	0	0	0	0.375	0	0.375	0	2
	0	0	0.083	0.083	0.083	0	0	0	0	0	0.250	0.250	0	0.250	3
	0.125	0	0	0.125	0	0	0	0	0	0	0.375	0	0.375	0	4

R　Q

交差点1からの遷移確率

$=(24.9 \quad 18.7 \quad 15.3 \quad 21.6 \quad 19.4)$

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

●交通流の2つの条件

交通流の持つ必要な性質
(1) 各ゾーンの発生・吸収交通量は等しい
(2) 各発生源から任意の吸収源までの交通量がOD交通量を満足している

●条件1

$$\boxed{S} = (I-Q)^{-1}\boxed{R}$$ とおく。

各吸収源への吸収交通量、各行の和が1となる$s \times r$行列

非吸収状態から吸収状態への遷移確率行列

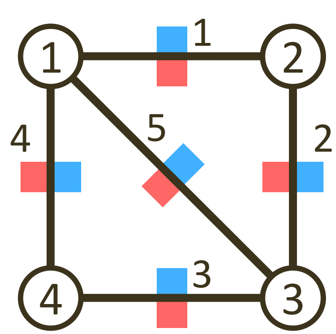
$$S = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad}^{r} \\ \begin{pmatrix} \boxed{P_0} \\ P_0' \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ r \\ \}\ s-r \end{array}$$ で表す。

OD間の遷移行列

---

r_2からs_2への交通量（ r_2出発のうち24.9%がs_2で吸収）

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 0.583 & 0.967 & 1.083 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 1.083 & 0.967 & 0.583 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.967 & 1.083 & 1.367 & 0.583 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.967 & 0.583 & 1.367 & 1.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.333 & 0.667 & 1.333 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.733 & 0.667 & 0.933 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 1.500 & 1.000 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.933 & 0.667 & 1.733 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0.500 & 1.000 & 1.500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.083 & 0.083 & 0 & 0 & 0.083 \\ 0 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 & 0.083 & 0.083 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.249 & 0.187 & 0.153 & 0.216 & 0.194 \\ 0.187 & \boxed{0.249} & 0.216 & 0.153 & 0.194 \\ 0.153 & 0.216 & 0.249 & 0.187 & 0.194 \\ 0.216 & 0.153 & 0.187 & 0.249 & 0.194 \\ 0.194 & 0.194 & 0.194 & 0.194 & 0.222 \\ 0.228 & 0.228 & 0.161 & 0.161 & 0.222 \\ \boxed{0.146 \quad 0.271 \quad 0.271 \quad 0.146 \quad 0.167} \\ 0.161 & 0.161 & 0.228 & 0.228 & 0.222 \\ 0.271 & 0.146 & 0.146 & 0.271 & 0.167 \end{pmatrix}$$



交差点3を通過した車の遷移確率

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

任意のゾーンの発生交通量が吸収交通量と等しいためには、

$$\begin{pmatrix} u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rr} \end{pmatrix}$$ が成立しなければならない

$$\begin{pmatrix} v_{r1} & v_{r2} & \cdots & v_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{sr} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (I-Q)^{-1} R$$ を参照して

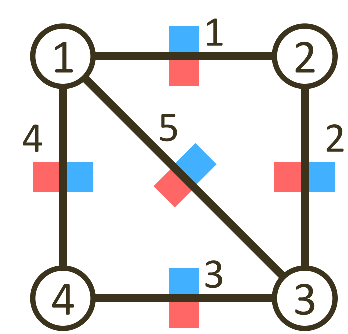
$\begin{pmatrix} u_{s1} & u_{s2} & \cdots & u_{sr} \end{pmatrix} = u^*$ とすれば、$u^* = \begin{pmatrix} u^* & 0 \end{pmatrix} (I-Q)^{-1} R = \begin{pmatrix} u^* & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} u^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_0' \end{pmatrix}$

$u^* = u^* P_0$ （この式のもとではP_0とu^*が独立に与えらず、下式と連立して求める）

$u = u_{s1} + u_{s2} + \cdots + u_{sr}$ （発生交通量の和）

<u>→各ゾーン間OD遷移確率と発生交通量の和を与えれば、発生・吸収交通量は等しくなる</u>

今回の例の場合、発生交通量の合計を100として上式を解くと、
$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$=(20,20,20,20,20)となる。



3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

●条件2

考え方：各車はトリップが終了したゾーンで、次の発生交通量となる
→Nトリップ目の発生交通量はN-1トリップ目の吸収交通量と等しい

$$u^*(N) = u^*(N-1)\cdot P_0 = \cdots = u^*(0)\cdot {P_0}^N$$

N→∞のとき、P_0が正則と仮定すれば${P_0}^N$は極限行列Wに近づく

$$u^*(\infty) = u^*(0)\cdot W \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_r \end{pmatrix}$$

$$(\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_r) = (\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_r)P_0$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_r = 1$$

$$u_{s1} = u\omega_1 \qquad u_{s2} = u\omega_2 \qquad \cdots \qquad u_{sr} = u\omega_r$$

が成立するので、ゾーンiの発生交通量はω_iによって表され、各ゾーンの発生交通量と吸収交通量の期待値が等しくなる
はじめにP_0を与えたときに矛盾がないようなPまたはQを与えれば、OD交通量を満たす（2番目の条件）

3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

●条件2

$$Q=\begin{pmatrix}0 & Q_1\\ 0 & Q_2\end{pmatrix}$$ より、 $$I-Q=\begin{pmatrix}I & -Q_1\\ 0 & I-Q_2\end{pmatrix}$$ $$(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix}I & Q_1(I-Q_2)^{-1}\\ 0 & (I-Q_2)^{-1}\end{pmatrix}$$

$S=(I-Q)^{-1}R$ に代入すると、

$$\begin{pmatrix}I & Q_1(I-Q_2)^{-1}\\ 0 & (I-Q_2)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{R_1}\\ R_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0\\ P_0'\end{pmatrix}$$

発生源から吸収源に直接行く交通は0

$$Q_1(I-Q_2)^{-1}R_2=P_0$$
$$(I-Q_2)^{-1}R_2=P_0'$$

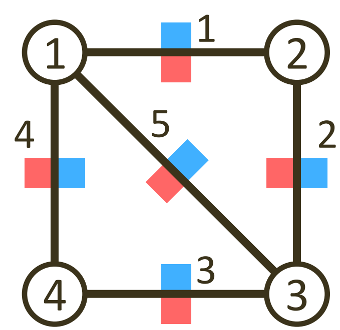
したがって、 $Q_1P_0'=P_0$

となり、これを満たすようにQ_1・Q_2・R_2（それぞれの遷移確率）を決めねばならない
そのような遷移行列のもとでは、以下の各街路区間交通量が与えられる

$$\boxed{X}=u^{*}Q_1(I-Q_2)^{-1}$$

各過渡状態における交通量

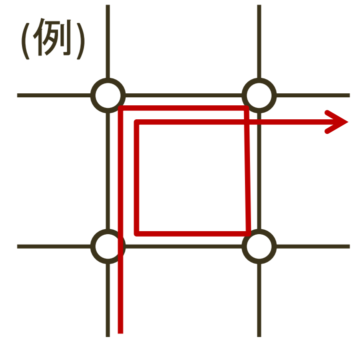
例では、u*=(20,20,20,20,20)のとき
X=(120,80,120,80)を得る



3. 吸収マルコフ連鎖としての交通流

●吸収マルコフ連鎖と実際交通

(例)



実際交通への適用では交差点における観測資料に基づいて遷移確率Pを決定

実際には起こらないような配分が出て、実際より交通量が増大していると考えられる

$$\tau = \left[I, Q_1 (I - Q_2)^{-1}\right] \boxed{\xi}$$

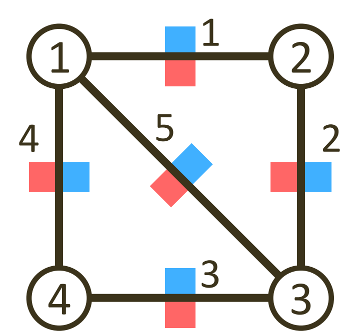
過渡状態数だけ1が並んだ列ベクトル

τは各発生源から出た交通が吸収されるまでの推移数の期待値を表す

OD交通量・区間ごとの所要時間・τから平均トリップ所要時間が求め、実平均と比較、マルコフ連鎖と考えるのが適切かどうか判断

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 0.583 & 0.967 & 1.083 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 1.083 & 0.967 & 0.583 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.967 & 1.083 & 1.367 & 0.583 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.967 & 0.583 & 1.367 & 1.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.333 & 0.667 & 1.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \boxed{5} \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

r_2出発交通の推移数期待値



4. 各ODごとの吸収マルコフ連鎖

●背景

ほとんどの車は最短経路を選択するので、1つのマルコフ連鎖と考えると、混雑が多い場合以外では実際より交通量増大
→全体で1つのマルコフ連鎖でなく、各ODごとに推移行列を与える

●理論

各ODごとにQ_{ij}を与え、OD交通量$u_{si,rj}$から各過渡状態の交通量を求める

$$\begin{pmatrix} u_{si,rj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}(I - Q_{ij})^{-1}$$

→各ODでの対応する1行を順序よく並べて、行列Yを生成、交通量は$X=uY$で与えられる。

r_1→s_2で検討
各OD交通量10

$$\begin{pmatrix} \boxed{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 0.583 & 0.967 & 1.083 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 1.083 & 0.967 & 0.583 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.967 & 1.083 & 1.367 & 0.583 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.967 & 0.583 & 1.367 & 1.083 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.333 & 0.667 & 1.333 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.733 & 0.667 & 0.933 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 1.500 & 1.000 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.933 & 0.667 & 1.733 & 0.667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.000 & 0.500 & 1.000 & 1.500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.7 & 5.8 & 9.7 & 10.8 \end{pmatrix}$$

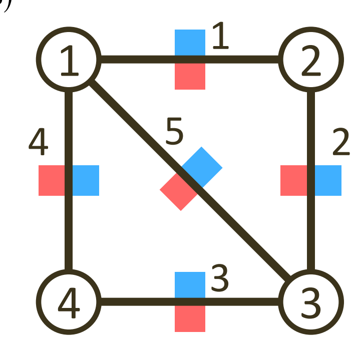
r_1→s_2の
交通量

r_1→s_2の
交通量

r_1→s_3の
交通量

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{10} & \boxed{10} & \cdots & 10 \end{pmatrix} \overset{Y}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.367 & 0.583 & 0.967 & 1.083 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.333 & 0.667 & 1.333 & 0.667 \end{pmatrix}}$$

r_1→s_2について
r_4→s_5について
r(r-1)行の行列



5. 結論

・交通量が非常に多ければ全体交通を1つのマルコフ連鎖と考えられる

・遷移行列を考えることで右折禁止や一方通行の影響を求められる

・マルコフ連鎖の特徴は各ODの可能な最長経路まで残らず配分される点

・長期の交通予測には、総発生交通量とゾーン間遷移行列を用いて、ODに対応する街路網上交通量分布を決定できる

・実際適用では計算が膨大になるので、適当な大きなゾーンや主要交差点を取り上げて適用できるだろう