Daly, A., Bierlaire, M., A general and operational representation of Genera-lized Extreme Value models, Transportation Research PartB, vol.40, pp.285-305, 2006.
「GEVモデルの一般的表現」

植村 恵里

1. GEVモデルとは？

GEVモデル

- McFadden(1978)が導出したモデル系
- ランダム効用理論に由来するモデル系の全体を定義したもの
- 例えばMNL，NL，CNL等を含む

μ-GEV関数が満たすべき性質

1. 全てのyに対して，$G(y) \geq 0$が成り立つ.
2. G関数は，μ次　$G(\lambda y) = \lambda^{\mu} G(y), for\ \lambda > 0$
3. 任意の$y_i \to \infty$　のときGの極限は＋∞
4. y_iの任意のk個の組み合わせについてのGの偏微分はkが奇数の時，非負，偶数のとき，非正.

$$(-1)^k D_{\mathscr{K}}(y) \leqslant 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^J,$$

$$\text{where } \mathscr{K} = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \mathscr{J}$$

$$D_{\mathscr{K}}(y) = \frac{\partial^k G}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_k}}(y).$$

1. GEVモデルとは？：μ-GEV関数

・ これら4つの性質を満たすG関数を用いると，選択確率は以下の式で表される．

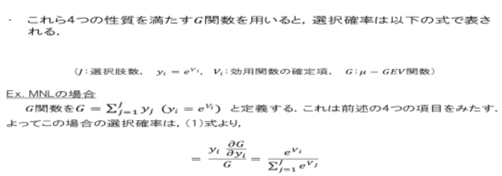
$$P(i|C) = \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_J)}{\mu G(y_1, \ldots, y_J)} \qquad \cdots(1)$$

（J：選択肢数， $y_i = e^{V_i}$， V_i：効用関数の確定項， G：$\mu - GEV$関数）

Ex. MNLの場合

G関数を$G = \sum_{j=1}^{J} y_j$ （$y_i = e^{V_i}$） と定義する．これは前述の4つの項目をみたす．

よってこの場合の選択確率は，(1)式より，



・ これら4つの性質を満たすG関数を用いると，選択確率は以下の式で表される．

（J：選択肢数， $y_i = e^{V_i}$， V_i：効用関数の確定項， G：$\mu - GEV$関数）

Ex. MNLの場合

G関数を$G = \sum_{j=1}^{J} y_j$ （$y_i = e^{V_i}$） と定義する．これは前述の4つの項目をみたす．

よってこの場合の選択確率は，(1)式より，

$$= \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}}{G} = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

$$= \frac{y_i \dfrac{\partial G}{\partial y_i}}{G} = \frac{e^{V_i}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_j}}$$

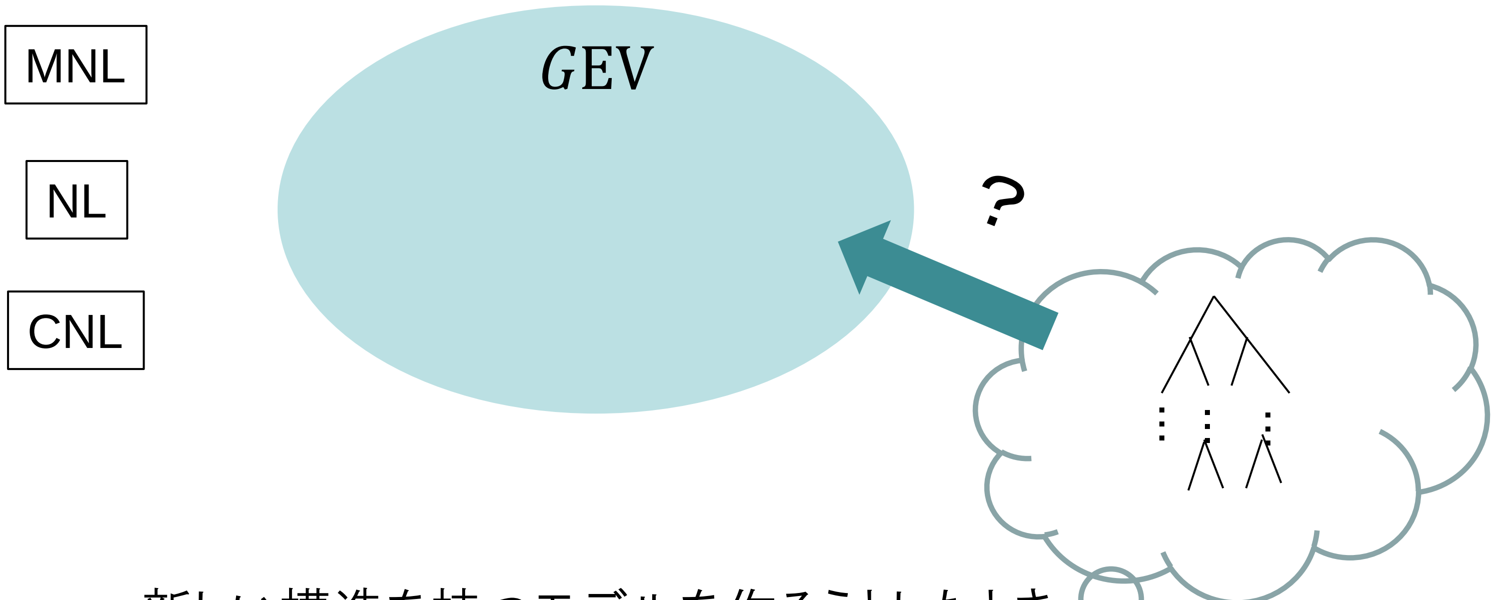
⇨ ロジットモデルの選択確率

1. GEVモデルとは？

MNL, NL, CNL等のランダム効用最大化理論
に基づいたモデルが，4条件を満たすG関数
によって定義づけられるということはわかった.

しかし・・・

1. GEVモデルとは？



新しい構造を持つモデルを作ろうとしたとき，
どうやってG関数を導出すればよいのか？

2. 本研究の目的

<u>目的</u>

- GEVモデルを一般化し，発展可能な表現を提案する
  - 新しいGEVモデルの発展に向けた一般的な理論的基礎の提案
  - **GEV-inheritanceの証明**を用いて新しいGEVモデルの一般化が可能に
  - **GEV-network表現**により，直感的に複雑な相関構造の記述が可能

3. GEV-inheritanceの証明

他のGEV関数から，新しいGEV関数を得られることを理論的に証明する.

- STEP1：GEV関数の線形結合によるGEV-inheritance
- STEP2：GEV関数を乗じることによるGEV-inheritance
- STEP3：これらを組み合わせたmain GEV-inheritance

STEP 1

G^iがμ -GEV関数であるとき，線形結合した

$$G(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G^i([y]_i)$$

も，μ -GEV関数となる($\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, p.$)

($[y]_i$:p個の部分空間から成る $\mathbb{R}^{J_i}$ におけるyの射影)

（証明：GEV関数が満たすべき4つの性質は，明らかにαi>0によって満たされる）

3. GEV-inheritanceの証明

STEP 2

Gがμ-GEV関数であるとき，G^{β}は，($\mu\beta$)-GEV関数となる. ($0 < \beta \leq 1$)

証明：

1. G^{β}は明らかに非負
2. Gがμ-homogeneityであるとき，$G(\lambda y)^{\beta} = (\lambda^{\mu} G(y))^{\beta} = \lambda^{\mu\beta} G(y)^{\beta}$それゆえ，$G^{\beta}$は$\mu\beta$-homogeneity
3. Limit propertyは，β>0で満たされる
4. 偏微分の妥当性(帰納法を用いて証明可能：本論文のAppendix参照)

3. GEV-inheritanceの証明

STEP1・STEP2を用いると,

STEP 3

G^iがμ_i−GEV関数であるとき,

$$G = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i G^i([y]_i)^{\mu/\mu_i}$$

は, μ−GEV関数となる. ($\alpha_i > 0, 0 < \mu \leq \mu_i$)

が導ける.

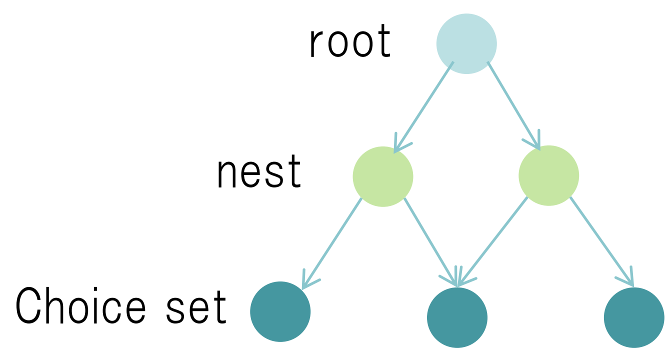
→他のGEV関数から, 新しいGEV関数が得られることがわかる.

4. GEV network

GEVネットワーク

- (N, E) :有限の非空有向グラフ(N :ノード集合， E : アーク(リンク)の集合)
- $Arc(i, j)$: 非負パラメータ$\alpha_{ij} > 0$を持つ
- ネットワークは閉路(circuit)を持たない

- ノード部分集合
  - R :predecessor(先行者)を持たない集合:root
  - C :successor(後続者)を持たないJノードの集合: choice set
  - その他:nest



4. GEV network

定理

「後続点を持つ任意のv_iについて，

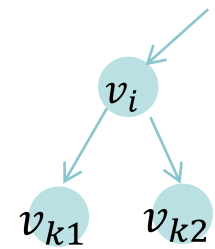
GEVネットワークのノードv_iにおけるG関数G^iは$\mu_i - GEV$関数

$$G^i(y_i) = \sum_{v_j \in S(v_i)} \alpha_{ij} G^j(y)^{\frac{\mu_i}{\mu_j}}$$

であり，後続点を持たない(= *choice set*である)v_iにおけるG関数G^iは

$$G^i(y_i) = y^{\mu_i}$$

である」ことが，帰納法により証明できる．（本文参照）



そのため，GEVネットワークの任意のノードにおいて，選択確率が(1)式で与えられるGEVモデルが適用できる．

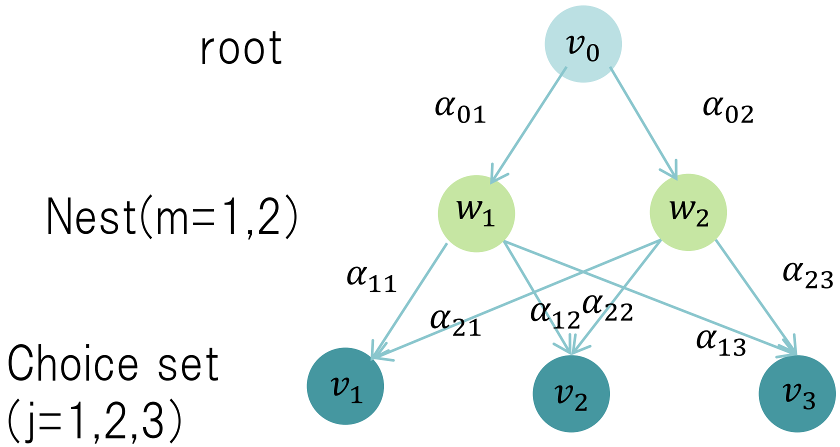
$$P(i|C) = \frac{y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_J)}{\mu G(y_1, \ldots, y_J)} \qquad \cdots(1)$$

このモデルは McFadden の GEV 理論，及び，効用最大化に従っている．

4. GEV network

- ネットワークにおける必要条件（有限で空ではなく，閉路をもたない）は，容易に確証される事項
- →モデラーがすべきは，モデルの相関構造を適切に表現するようなネットワーク構造をデザインすること.
- ネットワーク表現は，GEV-inheritance理論を用いて増殖させることで，常にGEVモデルを生み出すことができる.

5. 具体例



各Nodeが持つパラメータ
$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$

- クロスネストモデルは，以下の式で表されるG関数に由来することが，Ben-Akiva and Bierlaire(1999)で証明されている．

$$G(y_1, \ldots, y_J) = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j \in C} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \right)^{\mu/\mu_m}.$$

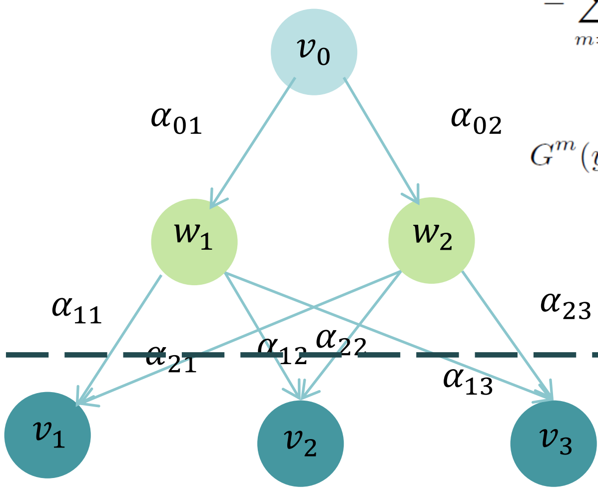
- これが，GEVネットワークから求まることを示す．

5. 具体例

$$G(y) = \sum_{m=1}^{M} (G^m(y))^{\mu/\mu_m} = \sum_{m=1}^{M} \Big(\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \Big)^{\mu/\mu_m}$$

$$\overline{U} = \frac{\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \log \sum_{m=1}^{M} e^{\mu(\overline{U}_m - \frac{\gamma}{\mu_m})}$$

$$P(m) = \frac{(\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{im} e^{\mu_m V_i})^{\mu/\mu_m}}{\sum_{n=1}^{M} \Big(\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{in} e^{\mu_n V_i} \Big)^{\mu/\mu_n}}$$



$$G^m(y) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} (G^j(y))^{\mu_m/\mu_j} = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m}$$

$$\overline{U}_m = \frac{\gamma}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_m} \log \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}$$

$$P_m(i) = \frac{\alpha_{im} e^{\mu_m V_i}}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}}$$

$$G^i(y) = y_i^{\mu_i}$$

$$\overline{U}_i = V_i + \frac{\gamma}{\mu_i}$$

$$P_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

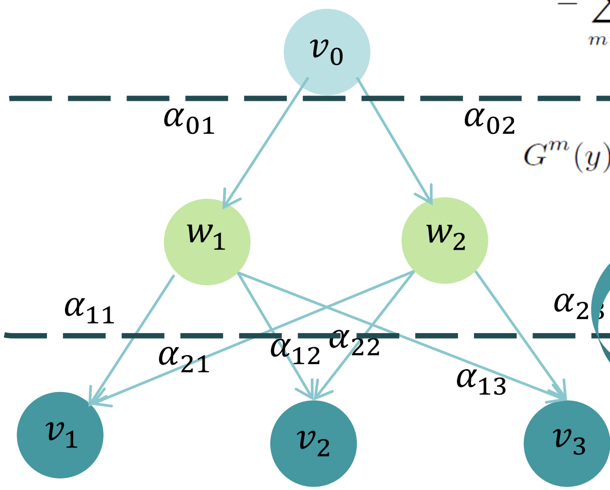
Choice set におけるG関数・期待最大効用・選択確率

5. 具体例

$$G(y) = \sum_{m=1}^{M} (G^m(y))^{\mu/\mu_m} = \sum_{m=1}^{M} \Big(\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \Big)^{\mu/\mu_m}$$

$$\overline{U} = \frac{\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \log \sum_{m=1}^{M} e^{\mu(\overline{U}_m - \frac{\gamma}{\mu_m})}$$

$$P(m) = \frac{(\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{im} e^{\mu_m V_i})^{\mu/\mu_m}}{\sum_{n=1}^{M} \Big(\sum_{i \in \mathcal{C}} \alpha_{in} e^{\mu_n V_i} \Big)^{\mu/\mu_n}}$$



$$G^m(y) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} (G^j(y))^{\mu_m/\mu_j} = \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m}$$

$$\overline{U}_m = \frac{\gamma}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_m} \log \sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}$$

$$P_m(i) = \frac{\alpha_{im} e^{\mu_m V_i}}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}}$$

nest におけるG関数・期待最大効用・選択確率

$$G^i(y) = y_i^{\mu_i}$$

$$\overline{U}_i = V_i + \frac{\gamma}{\mu_i}$$

$$P_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

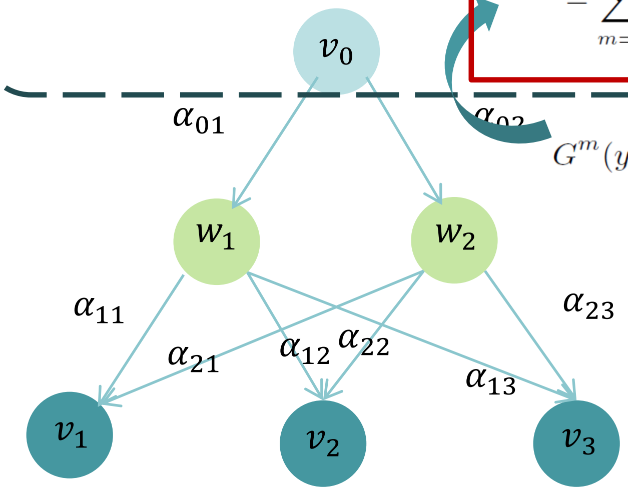
5. 具体例

$$G(y) = \sum_{m=1}^{M} (G^m(y))^{\mu/\mu_m} = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j \in C} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \right)^{\mu/\mu_m}$$

$$\overline{U} = \frac{\gamma}{\mu} + \frac{1}{\mu} \log \sum_{m=1}^{M} e^{\mu(\overline{U}_m - \frac{\gamma}{\mu_m})}$$

$$P(m) = \frac{(\sum_{i \in C} \alpha_{im} e^{\mu_m V_i})^{\mu/\mu_m}}{\sum_{n=1}^{M} \left(\sum_{i \in C} \alpha_{in} e^{\mu_n V_i} \right)^{\mu/\mu_n}}$$

rootにおけるG関数・期待最大効用・選択確率



$$G^m(y) = \sum_{j \in C} \alpha_{jm} (G^j(y))^{\mu_m/\mu_j} = \sum_{j \in C} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m}$$

$$\overline{U}_m = \frac{\gamma}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_m} \log \sum_{j \in C} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}$$

$$P_m(i) = \frac{\alpha_{im} e^{\mu_m V_i}}{\sum_{j \in C} \alpha_{jm} e^{\mu_m V_j}}$$

$$G^i(y) = y_i^{\mu_i} \qquad \overline{U}_i = V_i + \frac{\gamma}{\mu_i} \qquad P_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$G(y_1, \ldots, y_J) = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{j \in C} \alpha_{jm} y_j^{\mu_m} \right)^{\mu/\mu_m} .$$ が得られる

6. まとめ

- 本論文のポイント
  - GEV-inheritance 定理の証明と
  - GEV-network 表現

- GEVモデルをより一般化することで，直感的な構造に従ったネットワークをつくりだす自由を与えた.