A new estimation approach for the multiple discrete-continuous probit (MDCP) choice model

Transportation Research Part B 55 (2013) 1-22
Chandra R. Bhat, Marisol Castro, Mubassira Khan

2015/6/19(金)　理論談話会
交通研B4 庄司惟

論文の概要

離散・連続モデルの中の
ひとつのアプローチであるMDCEVモデル
を拡張したMDCPモデルに対し、
有用なパラメータ推定法であるMACML
を適用する。

目次

1. Discrete-continuous model の概要

従来のMNL,MNP→多肢から一つの選択肢を選択される。（mutually exclusive)

しかし、

多肢から複数の選択肢を選択しなければならない状況が存在する。

（例）行動の選択と時間の配分

→multiple discrete-continuous (MDC) situation！

1. Discrete-continuous model の概要

離散・連続選択モデル

(＝連続量の選択肢が離散的な選択肢に影響を及ぼす場合に、離散選択と連続量の選択を相互に関連付けてモデル化するものである。)

は、大きく二つに大別される。

①Tobitモデルを基にしたモデル群

②効用最大化理論に基づくモデル群

①Tobitモデルを基にしたモデル群

Tobitモデル→「離散問題の選択を表すモデル」と「選択される場合の観測量を表す連続問題のモデル」によって構成されている。式の構成法によりTypeⅠ～TypeⅤが存在する。

（例）TypeⅠ

$$\underbrace{y^*_{n1}}_{\text{個人nにおける}y_1\text{の値}} = \beta_1 \overbrace{\underline{x_{n1}}}^{\text{説明変数}} + \underbrace{\varepsilon_{n1}}_{\text{誤差項}}$$

$$\underbrace{y_{n1}}_{\text{実際に観測される}y_1\text{の値}} = \begin{cases} y^*_{n1} & if\ y^*_{n1} > 0 \\ 0 & if\ y^*_{n1} \leq 0 \end{cases}$$

（例）消費量は連続量として観測できるが、
消費量がゼロという世帯も存在する。

②効用最大化理論に基づくモデル群

$$\max_{\boldsymbol{x}} U_n = f_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{In})$$

$$subject\ to\ \sum_{i=1}^{I} p_i x_{in} = E_n, \forall x_{in} \geq 0$$

解き方として

(1)KKT condition→素直なアプローチ？ （本論文はこっち）

(2)Roy's identity→上記で解きにくい場合？

②効用最大化理論に基づくモデル群

(2)Roy's identity（寄り道？）

$$U_n = f_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{In})$$
$$z_i^* = g(p_1, p_2, \dots, p_I, E_n)$$

が最大となる
を求めたい。

しかし、KKTだと解きづらい場合がある。
これは$U_n = f_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{In})$の関数形による。

②効用最大化理論に基づくモデル群

(2)Roy's identity（寄り道？）

予算制約が $\sum_{i=1}^{I} p_i x_{in} = E_n$ という式で表されることから、

間接効用関数

（$U_n^* = f_n(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{In})$に$x_i^* = g(p_1, p_2, \dots, p_I, E_n)$を代入して得られる$U_n^* = Y(p_1, p_2, \dots, p_I, E_n)$のこと）

を適切に定義することで、Roy's identityが成立

$$x_i^* = \frac{\partial Y / \partial p_i}{\partial Y / \partial E_n} = g(p_1, p_2, \dots, p_I, E_n)$$

②効用最大化理論に基づくモデル群

(2)Roy's identity（寄り道？）

Miwa&Yamamoto&Morikawa(2008)の例

駐車場所（i=1,2)と駐車時間x_iに対し、

$$Y_{i=}Y_i(p_i, E, z_i, s, \eta, \varepsilon_i)$$

単位時間料金　所得　駐車場特性　消費者特性　非観測・消費者　非観測・駐車場

$$Y_{i=}(\alpha_i + \beta_i p_i + \theta_i E + \varphi_i z_i + \psi s + \eta)\exp(-\mu p_i) + \varepsilon_i$$

多肢から一つを選択する問題しか扱えない！！

②効用最大化理論に基づくモデル群

(2)Roy’s identity

→多肢から複数選択肢を選択する問題は扱えない

(1)KKT condition

→簡単に解ける関数型はごく限られる・・・

Bhat(2005)で

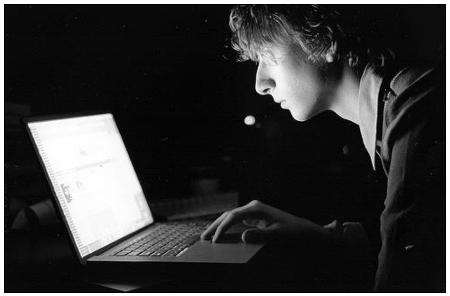
MDCEV

(Multiple Discrete-Continuous Extreme Value)

モデルを提案！

2. 関連する論文のレビュー

MDCEV（Bhat,2005)の概要 （今回の論文はこれの拡張です）



研究

$$U_1 = (t_1 + \gamma_1)^{\alpha_1} e^{(\beta x_1 + \varepsilon_1)}$$

キャッチボール

$$U_2 = (t_2 + \gamma_2)^{\alpha_2} e^{(\beta x_2 + \varepsilon_2)}$$

睡眠

$$U_3 = (t_3 + \gamma_3)^{\alpha_3} e^{(\beta x_3 + \varepsilon_3)}$$

講義

$$U_4 = (t_4 + \gamma_4)^{\alpha_4} e^{(\beta x_4 + \varepsilon_4)}$$

行動原理

$$\max_{t_1, t_2, t_3, t_4} \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$s.t. \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 24$$

（KKT条件）

$t_1 = 20$ $t_2 = 1$ $t_3 = 3$ $t_3 = 0$

MDCEV（Bhat,2005)の概要 （今回の論文はこれの拡張です）

非負条件のもと
KKT条件で解く
ラグランジュ乗数λ

$$\max_{t} \sum_{j} (t_j + \gamma_j)^{\alpha_j} e^{(\beta x_j + \varepsilon_j)}$$

$$s.t. \sum_{j} t_j = T$$

$$e^{(\beta x_j + \varepsilon_j)} \alpha_j (t_j^* + \gamma_j)^{\alpha_j - 1} - \lambda = 0 \; if \; t_j^* > 0$$

$$e^{(\beta x_j + \varepsilon_j)} \alpha_j (t_j^* + \gamma_j)^{\alpha_j - 1} - \lambda < 0 \; if \; t_j^* = 0$$

対数とって整理&
少なくとも一つの活動
には時間を振るので、
その活動をj=1とする

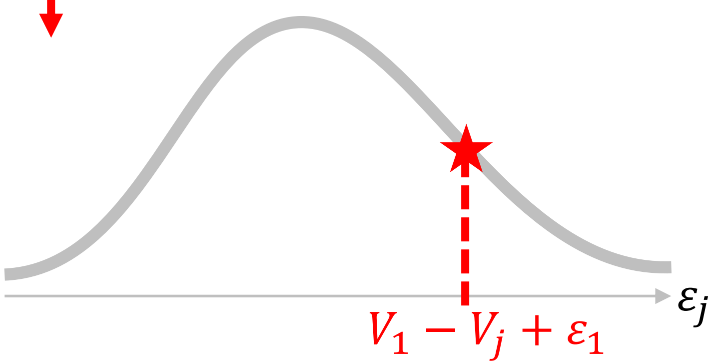
$$V_j + \varepsilon_j = V_1 + \varepsilon_1 \; if \; t_j^* > 0$$

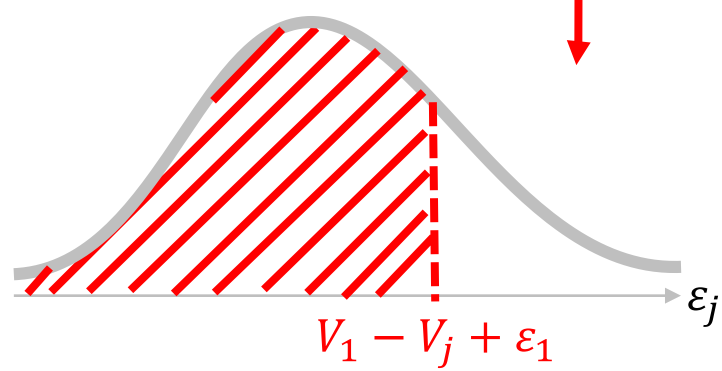
$$V_j + \varepsilon_j < V_1 + \varepsilon_1 \; if \; t_j^* = 0$$

※$V_j = \beta x_j + ln\alpha_j + (\alpha_j - 1) ln(t_j^* + \gamma_j) - \lambda < 0$

MDCEV（Bhat,2005)の概要 (今回の論文はこれの拡張です)

$$V_j + \varepsilon_j = V_1 + \varepsilon_1 \; if \; t_j^* > 0$$
$$V_j + \varepsilon_j < V_1 + \varepsilon_1 \; if \; t_j^* = 0$$





$$P(t_2^*, t_3^*, \ldots, t_M^*, 0,0, \ldots, 0)|\varepsilon_1$$

変数変換に伴う項 $\mathrm{J}_{ih} = \dfrac{\partial[V_1 - V_{i+1} + \varepsilon_1]}{\partial t_{h+1}^*}$

$(\mathrm{i,h} = 2, \ldots, \mathrm{M} - 1)$

$$= \left\{ \left(\prod_{i=2}^{M} g(V_1 - V_i + \varepsilon_1) \right) |\,\mathrm{J}\,| \right\} \times \left\{ \prod_{s=M+1}^{K} G(V_1 - V_i + \varepsilon_1) \right\}$$

MDCEV（Bhat,2005)の概要 （今回の論文はこれの拡張です）

$$P(t_2^*, t_3^*, \dots, t_M^*, 0,0, \dots, 0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(t_2^*, t_3^*, \dots, t_M^*, 0,0, \dots, 0) \,|\varepsilon_1 \; d\varepsilon_1$$

εに同一で独立なガンベル分布を仮定。ヤコビアンも簡単に計算できて、結局

$$= \left[\prod_{i=1}^{M} \frac{1-\alpha_i}{t_i^* + \gamma_i}\right]\left[\sum_{i=1}^{M} \frac{t_i^* + \gamma_i}{1-\alpha_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{M} e^{V_i}}{\left(\sum_{j=1}^{K} e^{V_j}\right)^M}\right](M-1)!$$

remarkably elegant and compact closed form structure!!

(Bhat 談)

2. 関連する論文のレビュー

Bhat(2011) A simulation evaluation of the maximum approach composite marginal likelihood (MACML) estimator for mixed multinomial probit models

（今回の論文はこれをMDCPに適用するものです）

従来

MNPはMSL(最尤）で推定。しかし、積分の次元が大きくなると計算困難になってしまう…

MNP

$$P(r) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_1} \cdots \int_{\varepsilon_r=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon_R=-\infty}^{\varepsilon_r+V_r-V_R} \phi(\varepsilon) d\varepsilon_R \cdots d\varepsilon_1$$

$$\phi(\varepsilon) = (2\pi)^{-R/2} |\Sigma|^{-1/2}\, exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\Sigma^{-1}\varepsilon^T\right)$$

多重積分減らしてもせいぜい(J-1)次にしかならない！！！

$$P(r) = \int_{\tilde{\varepsilon}_{1r}=-\infty}^{V_{r1}} \cdots \int_{\tilde{\varepsilon}_{r-1,r}=-\infty}^{V_{r,r-1}} \int_{\tilde{\varepsilon}_{r+1,r}=-\infty}^{V_{r,r+1}} \cdots \int_{\tilde{\varepsilon}_{R,r}=-\infty}^{V_{r,R}} \phi(\tilde{\varepsilon}) d\tilde{\varepsilon}_{R,r} \cdots d\tilde{\varepsilon}_{r+1,r} d\tilde{\varepsilon}_{r-1,r} \cdots d\tilde{\varepsilon}_{1,r}$$

$$\phi(\tilde{\varepsilon}) = (2\pi)^{-(R-1)/2} \left|\tilde{\Sigma}\right|^{-1/2} exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{\varepsilon}^T\right)$$

Bhat(2011) MACML

ポイント

①MVNCD(multivariate standard normal cumulative distribution)の評価

②CML(composite marginal likelihood)を用いる

Bhat(2011) MACML

①MVNCD(multivariate standard normal cumulative distribution)の評価

$$Pr(\boldsymbol{W} < \boldsymbol{w}) = Pr(W_1 < w_1, W_2 < w_2, \cdots, W_I < w_I)$$

$$= \underbrace{Pr(W_1 < w_1, W_2 < w_2)}_{\text{二変量周辺分布}} \times \prod_{i=3}^{I} \underbrace{Pr(W_i < w_i | W_1 < w_1, \cdots, W_{i-1} < w_{i-1})}_{\text{一変量条件付分布}}$$

$$Pr(W_i < w_i | W_1 < w_1, \cdots, W_{i-1} < w_{i-1}) = \underbrace{E(\widetilde{I_i} | \widetilde{I_1} = 1, \widetilde{I_2} = 1, \cdots, \widetilde{I_{i-1}} = 1)}_{\text{Indicator } \widetilde{I_i} \text{を用いた表現}}$$

$$\widetilde{I_i} = \begin{cases} 1 & if\ W_i < w_i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

この定義より

$$E(\widetilde{I_i}) = \underbrace{\Phi(w_i)}_{\text{一変量累積標準正規分布}}$$

Bhat(2011) MACML

①MVNCD(multivariate standard normal cumulative distribution)の評価

$E(\widetilde{I_i}|\widetilde{I_1}=1,\widetilde{I_2}=1,\cdots,\widetilde{I_{i-1}}=1)$ を求める。つまり、

$\widetilde{I_1},\widetilde{I_2},\cdots,\widetilde{I_{i-1}}(=\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}})$を独立変数として、従属変数$\widetilde{I_i}$をうまく表現することを考えればよい。＝回帰モデル

$$\widetilde{I_i}-E(\widetilde{I_i})=\boldsymbol{\alpha}'[\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}}-E(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}})]+\tilde{\eta}$$

最小二乗係数$(=\boldsymbol{\Omega}_{<i}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{i,<i})$

$y=ax+b$

$a={S_{xy}}/{S_x}$, $b=\bar{y}-a\bar{x}$

と推定するアレです

$$\boldsymbol{\Omega}_{<i}=\mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}},\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}})=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_1},\widetilde{\boldsymbol{I}_1}) & \cdots & \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_1},\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}})\\ \vdots & & \vdots\\ \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}},\widetilde{\boldsymbol{I}_i}) & \cdots & \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}},\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}})\end{bmatrix}$$

独立変数の分散

$$\boldsymbol{\Omega}_{i,<i}=\mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}},\widetilde{\boldsymbol{I}_i})=\begin{bmatrix}\mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_i},\widetilde{\boldsymbol{I}_1})\\ \vdots\\ \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_i},\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}})\end{bmatrix}$$

独立変数と従属変数の共分散

Bhat(2011) MACML

①MVNCD(multivariate standard normal cumulative distribution)の評価

$$\tilde{I}_i = \begin{cases} 1 & if\ W_i < w_i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$ より $$\tilde{I}_i^{\,2} = \begin{cases} 1 & if\ W_i < w_i \\ 0 & otherwise \end{cases} \rightarrow E\left(\tilde{I}_i^{\,2}\right) = \Phi(w_i)$$

$$\tilde{I}_i\tilde{I}_j = \begin{cases} 1 & if\ W_i < w_i \cap W_j < w_j \\ 0 & otherwise \end{cases} \rightarrow E\left(\tilde{I}_i\tilde{I}_j\right) = \underline{\Phi_2(w_i, w_j)}$$

二変量累積標準正規分布

$$\mathrm{Cov}\left(\tilde{I}_i, \tilde{I}_i\right) = E\left(\tilde{I}_i^{\,2}\right) - \left\{E\left(\tilde{I}_i\right)\right\}^2 = \Phi(w_i)[1 - \Phi(w_i)]$$

$$\mathrm{Cov}\left(\tilde{I}_i, \tilde{I}_j\right) = E\left(\tilde{I}_i\tilde{I}_j\right) - E\left(\tilde{I}_i\right)E\left(\tilde{I}_j\right) = \Phi_2\left(w_i, w_j\right) - \Phi(w_i)\Phi\left(w_j\right)$$

Bhat(2011) MACML

①MVNCD(multivariate standard normal cumulative distribution)の評価

$$\tilde{I}_i - E(\tilde{I}_i) = \boldsymbol{\alpha}'[\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}} - E(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}})] + \tilde{\eta} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Omega}_{<i}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{i,<i}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{<i} = \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}}, \widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{I}}_1, \tilde{\boldsymbol{I}}_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{I}}_1, \widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}}, \tilde{\boldsymbol{I}}_i) & \cdots & \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}}, \widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}}) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Omega}_{i,<i} = \mathrm{Cov}(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}}, \tilde{\boldsymbol{I}}_i) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{I}}_i, \tilde{\boldsymbol{I}}_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Cov}(\tilde{\boldsymbol{I}}_i, \widetilde{\boldsymbol{I}_{i-1}}) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{I}_i, \tilde{I}_i) = \Phi(w_i)[1 - \Phi(w_i)] \qquad \mathrm{Cov}(\tilde{I}_i, \tilde{I}_j) = \Phi_2(w_i, w_j) - \Phi(w_i)\Phi(w_j)$$

$$E(\tilde{I}_i | \tilde{I}_1 = 1, \tilde{I}_2 = 1, \cdots, \widetilde{I_{i-1}} = 1) = E(\tilde{I}_i) + \boldsymbol{\alpha}'[\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}} - E(\widetilde{\boldsymbol{I}_{<i}})]$$
$$= \Phi(w_i) + (\boldsymbol{\Omega}_{<i}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{i,<i})'(1 - \Phi(w_1), 1 - \Phi(w_2), \cdots, 1 - \Phi(w_{i-1}))'$$

一,二変量正規分布だけで表現することができた！！！

Bhat(2011) MACML

②CML(composite marginal likelihood)を用いる

合成周辺尤度

全尤度関数が評価困難なときに使う。

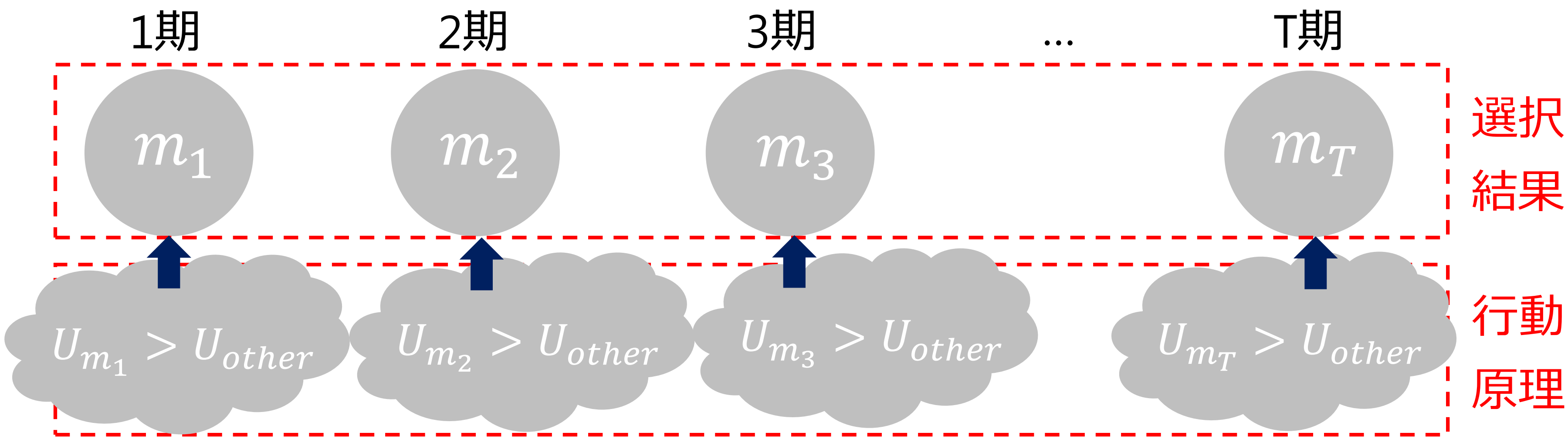
MNPだと、次元数的にやはり推定困難に陥る。

結論として、①のMVNCDの近似手法と併用することで、MNPの推定に非常に有効に働く！

Bhat(2011) MACML

②CML(composite marginal likelihood)を用いる
合成周辺尤度

こんな状況を想定・・・



通常の最尤法では

$$L(\theta, m) = Prob(C_1 = m_1, C_2 = m_2, C_3 = m_3, \ldots, C_T = m_T)$$

Bhat(2011) MACML

②CML(composite marginal likelihood)を用いる

合成周辺尤度

$$L(\theta,\boldsymbol{m})=Prob(C_1=m_1,C_2=m_2,C_3=m_3,\dots,C_T=m_T)$$

計算を簡単にするために以下を提案

$$L_{CML}^{2}(\theta,\boldsymbol{m})=Prob(C_1=m_1)\times Prob(C_2=m_2)\times\cdots\times Prob(C_T=m_T)$$

→同一個人の選択間の誤差相関を考慮できていない

$$L_{CML}^{3}(\theta,\boldsymbol{m})=\prod_{t=1}^{T-1}\prod_{w=t+1}^{T}Prob(C_t=m_t,C_w=m_w)$$

T期から異なる
2期を全て列挙

→MNPベースのモデルではこれが適切（結果論）

行動原理

$$\max_{\boldsymbol{x}_{qt}} U_{qt}(\boldsymbol{x}_{qt}) = \sum_{k=1}^{K} \frac{\gamma_{qk}}{\alpha_{qk}} \psi_{qk} \left(\left(\frac{x_{qk}}{\gamma_{qk}} + 1 \right)^{\alpha_{qk}} - 1 \right)$$

$$\psi_{qtk} = \exp(\underline{\boldsymbol{\beta}'_q}\, \underline{\boldsymbol{z}_{qtk}} + \underline{\xi_{qtk}})$$

消費者特性　外生因子　誤差項

$$s.t. \sum_{k=1}^{K} p_{qk} x_{qk} = E_q$$

q : 消費者
k : 選択肢

全ての消費者に関して、選択肢数と選択機会数は等しい。

KKT

$$\boxed{\begin{array}{llll} y^*_{qm_q} = 0, & if\ x^*_{qk} > 0, & k = 1, \dots, K, & k \neq m_q \\ y^*_{qm_q} < 0, & if\ x^*_{qk} = 0, & k = 1, \dots, K, & k \neq m_q \end{array}}$$

$$y^*_{qm_q} = y_{qk} - y_{qm_q} \qquad y_{qk} = V_{qk} + \widetilde{\boldsymbol{\beta}}'_q \boldsymbol{z}_{qk} + \xi_{qk}$$

$$V_{qk} = \boldsymbol{b}' \boldsymbol{z}_{qk} + (\alpha_k - 1) \ln \left({x^*_{qk}}/{\gamma_k} + 1 \right) - \ln p_{qk}$$

推定するのは　$\alpha_{k,} \gamma_{k}, \boldsymbol{b}, \delta, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Lambda}$

尤度関数をどう記述するか・・・

結局

$$L_q = \underline{\det(\boldsymbol{J}_q)} \int_{\boldsymbol{h}_{q,NC}=-\infty}^{0} f_{K-1}(\underline{\boldsymbol{h}_{q,NC}}, \underline{\boldsymbol{0}_{L_{q,C}}} | \underline{\widetilde{\boldsymbol{H}}_q}, \underline{\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_q})\, d\boldsymbol{h}_{q,NC}$$

密度関数内の
変数変換に伴う
ヤコビアン

差分$y^*_{qm_q}$を
“Non-Consumed”
“Consumed”
に整理

平均行列と
共分散行列も
整理

$$L_q = \det(\boldsymbol{J}_q) \int_{\boldsymbol{h}_{q,NC}=-\infty}^{0} f_{K-1}(\boldsymbol{h}_{q,NC}, \boldsymbol{0}_{L_{q,C}} | \widetilde{\boldsymbol{H}}_q, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_q)\, d\boldsymbol{h}_{q,NC}$$

$$= \det\left(\boldsymbol{J}_q\right)$$

$$\times \underbrace{\phi_{L_{q,C}}}_{\text{多変量正規密度}}(\boldsymbol{0}_{L_{q,C}}; \widetilde{\boldsymbol{H}}_{q,C}, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_{q,C}) \times \underbrace{\Phi_{L_{q,NC}}}_{\text{多変量正規累積}}(\boldsymbol{0}_{L_{q,NC}}; \check{\boldsymbol{H}}_{q,NC}, \check{\boldsymbol{\Psi}}_{q,NC})$$

→ここからMACMLの
多変量正規累積→1,2変量正規累積　近似手法が
であるかと思いきや、そのような記述がない。
コードにも表現されていない。
多変量のまま計算している？（調査中…)

Table 1
MDCP model estimation results for the simulated data.

Parameter	True value	Parameter estimates		Standard error estimates		
		Mean estimate	Absolute percentage bias (APB)	Finite sample standard error (FSE)	Asymptotic standard error (ASE)	Absolute percentage bias asymptotic standard error (APBASE)
(a) Simulation results for the five-alternative case						
Mean values of the β_q vector ($\boldsymbol{b}$)						
b_1	0.500	0.494	1.133	0.021	0.019	12.332
b_2	−1.000	−0.987	1.279	0.021	0.025	20.169
b_3	1.000	1.007	0.659	0.022	0.025	11.225
b_4	−1.000	−0.997	0.299	0.013	0.013	1.833
b_5	−0.500	−0.505	0.934	0.012	0.012	3.051
Cholesky parameters characterizing the covariance matrix of the β_q vector (l_Ω)						
$l_{\Omega 1}$	0.900	0.898	0.192	0.019	0.017	6.142
$l_{\Omega 2}$	0.600	0.605	0.839	0.032	0.035	7.831
$l_{\Omega 3}$	0.800	0.794	0.733	0.032	0.033	5.798
$l_{\Omega 4}$	0.800	0.791	1.186	0.034	0.032	5.181
$l_{\Omega 5}$	0.400	0.415	3.794	0.045	0.049	10.282
$l_{\Omega 6}$	0.300	0.291	3.127	0.105	0.116	10.913
Cholesky parameters characterizing the covariance matrix of the ξ_q vector (l_Λ)						
$l_{\Lambda 1}$	1.100	1.095	0.487	0.017	0.019	15.793
$l_{\Lambda 2}$	1.000	0.995	0.484	0.012	0.013	7.849
$l_{\Lambda 3}$	0.600	0.596	0.713	0.018	0.016	10.679
$l_{\Lambda 4}$	0.800	0.797	0.400	0.007	0.009	28.653
Satiation parameters (γ)						
γ_1	1.000	1.002	0.224	0.036	0.036	0.405
γ_2	1.000	1.007	0.689	0.044	0.039	11.310
γ_3	1.000	1.016	1.598	0.038	0.040	6.161
γ_4	1.000	1.004	0.374	0.041	0.037	8.996
γ_5	1.000	1.001	0.051	0.037	0.037	0.881
Overall mean value across parameters		0.566	0.960	0.030	0.031	9.274

6. まとめ

- 離散/連続モデル
- MDCEVモデル
- MDCPモデル
- MACML推定法

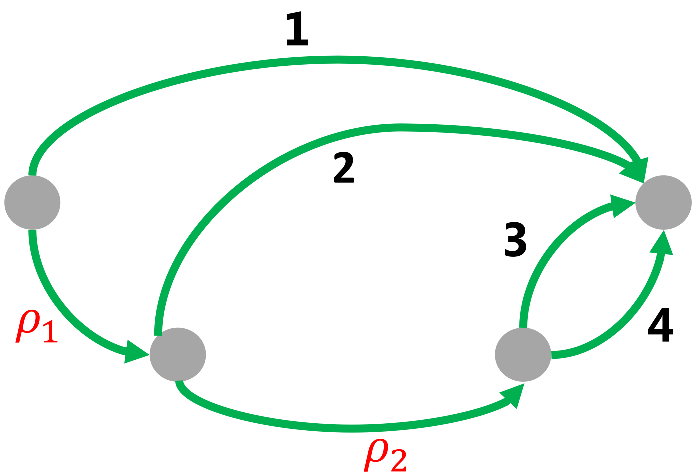
MACMLの中の

①MVNCD(多変量標準正規累積分布)
の近似手法を検証してみる。

$$Pr(\boldsymbol{W} < \boldsymbol{w}) = Pr(W_1 < w_1, W_2 < w_2, \cdots, W_I < w_I)$$

$$= P\,r(W_1 < w_1, W_2 < w_2)$$
$$\times \prod_{i=3}^{I} \left\{ \Phi(w_i) + (\boldsymbol{\Omega}_{<i}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{i,<i})' \big(1 - \Phi(w_1), 1 - \Phi(w_2), \cdots, 1 - \Phi(w_{i-1})\big)' \right\}$$

経路選択モデルを考える



$$V_1 = \alpha x_1 + \varepsilon_1$$
$$V_1 = \alpha x_2 + \varepsilon_2$$
$$V_1 = \alpha x_3 + \varepsilon_3$$
$$V_1 = \alpha x_4 + \varepsilon_4$$

経路コストx_jは全て等しいとする。 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10(\mathrm{minuite})$

経路重複=相関と考え、誤差項の分散共分散行列を次のように仮定

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 & \rho_1 + \rho_2 \\ 0 & \rho_1 & \rho_1 + \rho_2 & 1 \end{pmatrix}$$

意思決定に関係あるのは誤差項のみ。

多変量正規乱数による ε_j でなされる意思決定と、

MACMLの近似手法による確率 P_j から導かれる

尤もらしい意思決定が、

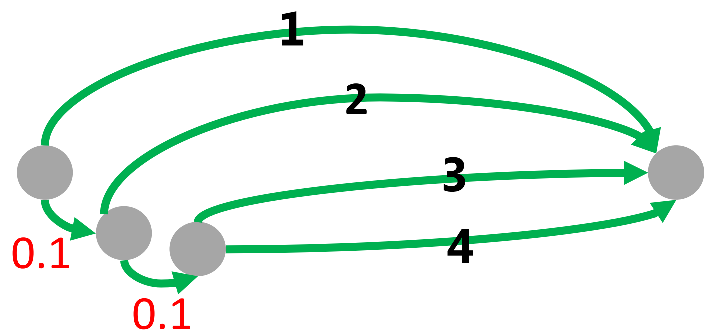
どの程度一致するのか調べる。

乱数→一組の ε_j に対して、一つの意思決定が成される。

↕

MACML→誤差項の平均/分散が分かれば一意に定まる。

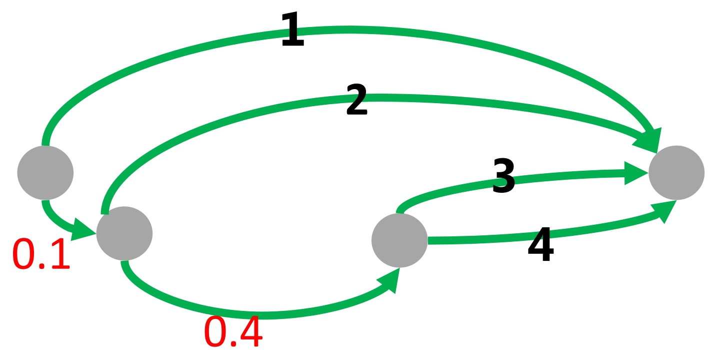
example1



1選択	2選択	3選択	4選択
2681	2506	2394	2419

P_1	P_2	P_3	P_4
0.2689	0.2505	0.2403	0.2403

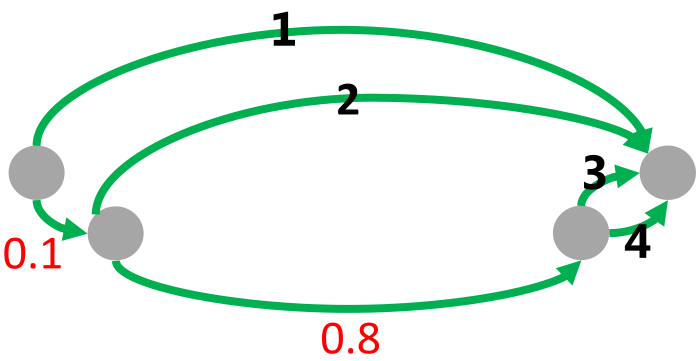
example2



1選択	2選択	3選択	4選択
2819	2733	2212	2236

P_1	P_2	P_3	P_4
0.2852	0.2679	0.2235	0.2235

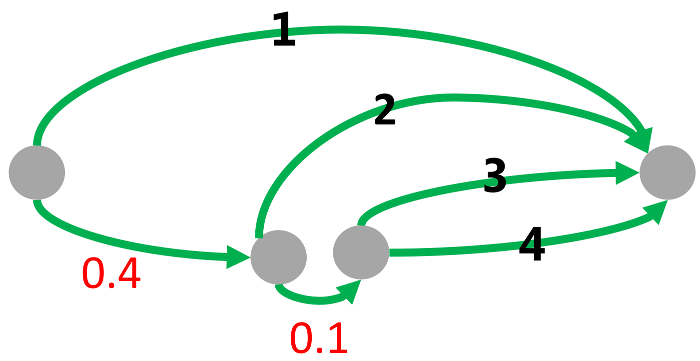
example3



1選択	2選択	3選択	4選択
3131	3105	1857	1907

P_1	P_2	P_3	P_4
0.3174	0.3020	0.1903	0.1903

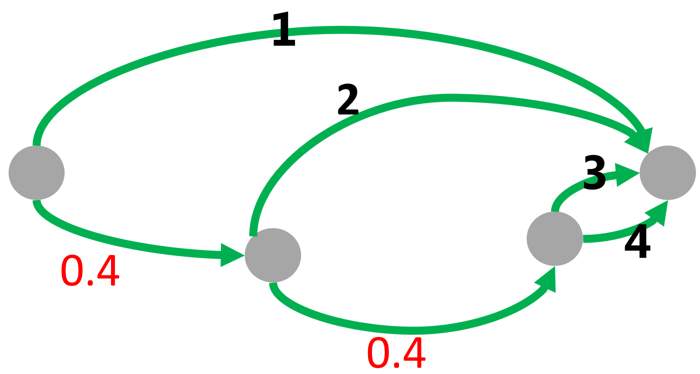
example4



1選択	2選択	3選択	4選択
3171	2359	2219	2251

P_1	P_2	P_3	P_4
0.3159	0.2379	0.2231	0.2231

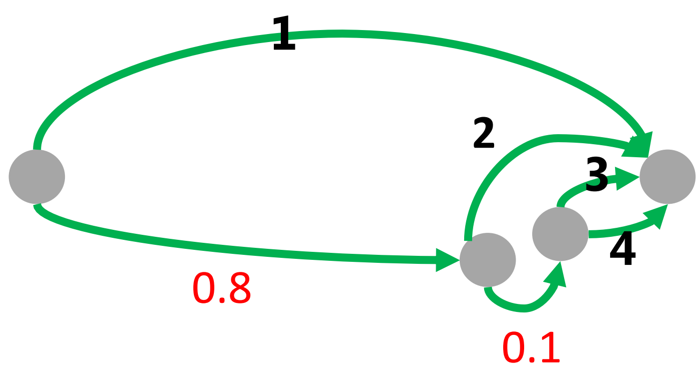
example5



1選択	2選択	3選択	4選択
3377	2648	1961	2014

P_1	P_2	P_3	P_4
0.3375	0.2667	0.1979	0.1979

example6



1選択	2選択	3選択	4選択
4012	2277	1831	1880

P_1	P_2	P_3	P_4
0.4030	0.2284	0.1843	0.1843

お疲れ様でした！

shoji[at]trip.t.u-tokyo.ac.jp

参考文献

1)福山,羽藤:ネットワーク上の空間計画に向けた観測と行動モデルの展開

2) Dubin, J.A., McFadden, D.L. : An econometric analysis of residential electric appliance holdings and consumption, *Econometrica*, Vol. 52, No. 2, pp. 345-362,1984.

3)三輪富生, 山本俊行, 森川高行: 駐車場所－駐車時間選択行動への離散－連続選択モデルの適用と駐車料金施策分析, 都市計画論文集, No. 43 - 1, pp. 34-41, 2008

4) C.R. Bhat, Raghuprasad Sidharthan: A simulation evaluation of the maximum approach composite marginal likelihood (MACML) estimator for mixed multinomial probit models, Transportation Research Part B 45,pp. 940-953, 2011

5) C.R. Bhat: A multiple discrete–continuous extreme value model: formulation and application to discretionary time-use decisions, Transportation Research Part B, 39 (8) pp. 679–707, 2005

6) C.R. Bhat: The maximum approximate composite marginal likelihood (MACML) estimation of multinomial probit-based unordered response choice models, Transportation Research Part B 45 pp. 923–939, 2011

$\boldsymbol{\beta}_q$ D×1の列ベクトル。$\boldsymbol{\beta}_q = \mathbf{b} + \tilde{\beta}_q,\ \ \tilde{\beta}_q \sim MVN_D(\mathbf{0}_D, \boldsymbol{\Omega})$

ξ_{qtk} $\boldsymbol{\beta}_q$とは無相関。消費者間でも無相関。
選択肢kと,時期tではそれぞれ相関あり。
以下の自己回帰モデルを仮定して表現。

$$\xi_{qtk} = \delta\xi_{q(t-1)k} + \underline{\eta_{qtk}}$$ 選択肢間の相関のみあり

$$\boldsymbol{\eta}_{qt} = (\eta_{qt1}, \eta_{qt2}, \dots, \eta_{qtK})' \sim MVN_K(\mathbf{0}_K, \boldsymbol{\Lambda})$$

$$\psi_{qtk} = \exp(\underline{\boldsymbol{\beta}'_q}\,\underline{\mathbf{z}_{qtk}} + \underline{\xi_{qtk}})$$

消費者特性 外生因子 誤差項

q:消費者
t:選択時期
k:選択肢