スタートアップゼミ課題

交通行動とモデリング 第6章 前半

6.1.1 – 6.4.5 (pp. 103 – 132)

社会基盤学専攻 交通・都市・国土学研究室

M1 伊藤 篤志

6.1 離散選択モデルの導出

連続量の選択

ex) 1ヶ月の電話通話時間, 1年間の労働日数

$$Y_n = \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} + \ldots + \beta_K x_{Kn} + \varepsilon_n$$ →最小二乗法 (Least Square Method)

Y_n : 個人nの連続型被説明関数, x_{kn} : 個人nのk番目の説明変数, ε_n : 確率項, β_k : k番目の未知のパラメータ

離散量の選択

ex) ブランドの選択, 交通手段の選択,
子供を作るか作らないか, 本社の設置都市の選択

$$V_{in} = \beta_1 x_{1in} + \beta_2 x_{2in} + \ldots + \beta_K x_{Kin}$$

V_{in} : 個人nの選択肢iに対する効用
β_k : k番目の未知のパラメータ
x_{kn} : 個人nの選択肢iに対するk番目の説明変数

$$U_{in} = \beta_1 x_{1in} + \beta_2 x_{2in} + \ldots + \beta_K x_{Kin} + \varepsilon_n$$
$$= V_{in} + \varepsilon_{in}$$

V_{in} : 効用の確定項, ε_{in} : 効用の確率項

分析者が行動者の効用の確定部分を知り得ても,
効用の未知の部分 (確率項) があるために, 観測される行動は確率的に見える

効用の確率項ε_{in} が表す要因

- 確定部分に含まれる変数以外の要因
- 確定部分を線形和とした関数形の誤差
- 属性の重みβ_k を個人間で均一とした誤差
- 説明変数の測定誤差

6.1 離散選択モデルの導出

個人nが選択肢iを選択する確率 $P_n(i)$: $P_n(i) = \Pr\{U_{in} \geqq U_{jn}, \text{ for } \forall j, i \neq j\}$ (6.1.4)

個人が確率効用を最大化するとして導かれるモデル:

確率効用最大化モデル (Random Utility Maximization (RUM))

2項選択モデル

(6.1.4) 式の変形:

$$
\begin{aligned}
P_n(i) &= \Pr\{U_{in} \geqq U_{jn}, \text{ for } \forall j, i \neq j\} \\
&= \Pr\{V_{in} + \varepsilon_{in} \geqq V_{jn} + \varepsilon_{jn}\} \\
&= \Pr\{\varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in} \leqq V_{in} - V_{jn}\} \\
&= \Pr\{\varepsilon_n \leqq V_{in} - V_{jn}\} \qquad (\because \varepsilon_n \equiv \varepsilon_{jn} - \varepsilon_{in}) \\
&= F_\varepsilon(V_{in} - V_{jn})
\end{aligned}
$$

(ただし, F_εはε_nの累積分布関数 (CDF))

2項プロビットモデル

中心極限定理より,
効用の確率項ε_nの分布系として
正規分布を仮定することが妥当

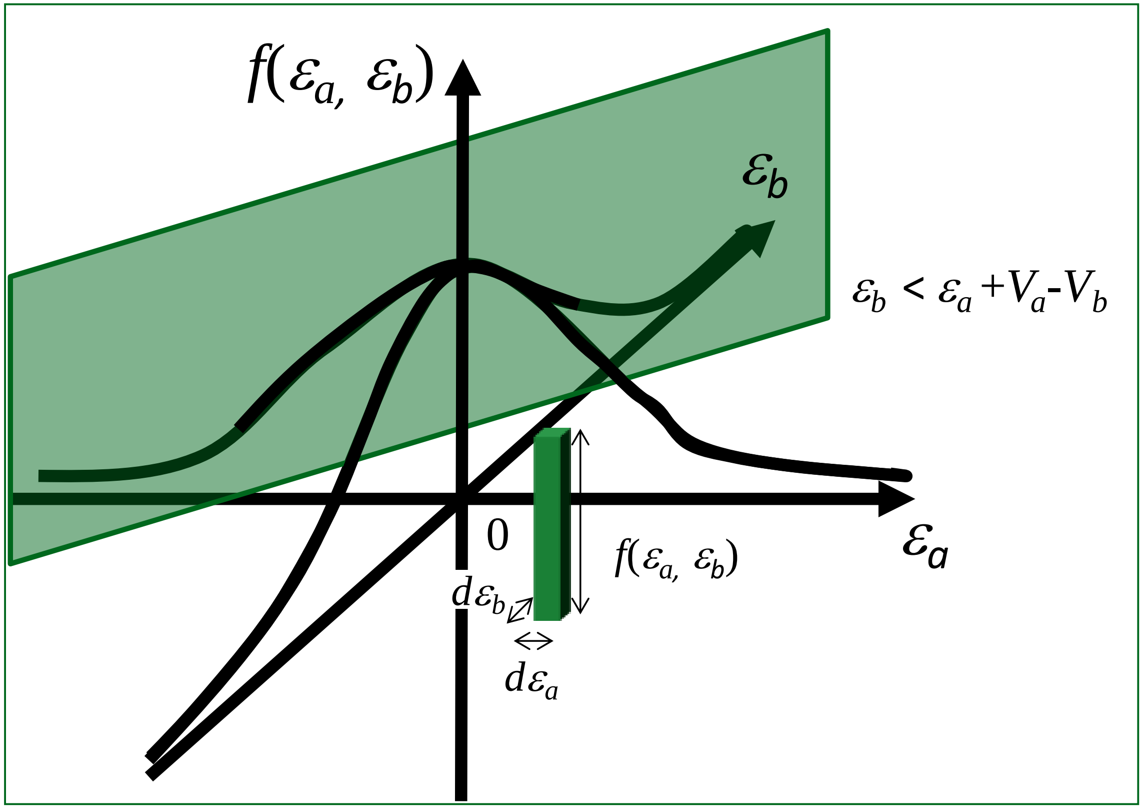
選択確率式に積分形が残るので計算が煩雑

2項ロジットモデル (Logit Model)

2つの選択肢の確率項の差ε_nに
ガンベル分布を仮定

$$
P_n(i) = \frac{1}{1+\exp\{-\mu(V_{in}-V_{jn})\}} = \frac{\exp(\mu V_{in})}{\exp(\mu V_{in})+\exp(\mu V_{jn})}
$$

(μはε_nのばらつきの程度を表すスケールパラメータ)



$$P_a(U_a > U_b)$$

$$= \Pr\{V_a + \varepsilon_a > V_b + \varepsilon_b\}$$

$$= \Pr\{\varepsilon_b < \varepsilon_a + V_a - V_b\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\varepsilon_a + V_a - V_b} \underbrace{f(\varepsilon_a, \varepsilon_b)\, d\varepsilon_b\, d\varepsilon_a}_{\text{直方体の体積}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f(\varepsilon_a)} \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon_a + V_a - V_b} \underline{f(\varepsilon_b)}\, d\varepsilon_b \right) d\varepsilon_a$$

$$= \frac{\exp V_a}{\exp V_a + \exp V_b}$$

ガンベル分布

$$f(\varepsilon_a) = e^{-\varepsilon_a} e^{-e^{\varepsilon_a}}$$

ガンベル分布

$$f(\varepsilon_b) = e^{-\varepsilon_b} e^{-e^{\varepsilon_b}}$$

モデルの特定化

・説明変数の関数形をきめる
・誤差項に用いる確率変数を特定の分布系に仮定する, など

効用関数の特定化例

所要時間　費用　免許保有ダミー　女性ダミー

$$
\begin{aligned}
V_{車n} &= \beta_1 \qquad\quad + \beta_3 t_{車n} + \beta_4 c_{車n} + \beta_5 l_n \\
V_{鉄道n} &= \qquad \beta_2 + \beta_3 t_{鉄道n} + \beta_4 c_{鉄道n} \\
V_{バスn} &= \qquad\qquad\; \beta_3 t_{バスn} + \beta_4 c_{バスn} \qquad\quad + \beta_6 f_n
\end{aligned}
$$

n: 個人n

Specification Table

定数項

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
車	1	0	$t_{車}$	$c_{車}$	l	0
鉄道	0	1	$t_{鉄道}$	$c_{鉄道}$	0	0
バス	0	0	$t_{バス}$	$c_{バス}$	0	f

ダミー変数　LOS変数　SE変数

・定数項: 説明変数では表せなかった効用のうち, 全個人で共有する値
・サービスレベル変数 (LOS変数): 各選択肢独自のサービスレベルを表す
・社会経済変数 (SE変数): 意思決定者の属性やトリップの属性を表す

6.2 離散選択モデルの推定

モデルの推定

理論モデルに含まれる未知パラメータ (β, μ) を同定

最尤推定法 (Maximum Likelihood Estimation; MLE)

行動を表す理論モデルが正しいと仮定, 観測されたデータが得られる
もっともらしさ (尤度L) が最大になるようにパラメータを同定

$$L = \prod_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{J} P_n(i)^{d_{in}}$$

N人の対象　J個の選択肢

計算の簡便化のため,
両辺に対数をとる

$$\ln L = LL = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{J} d_{in} \ln P_n(i)$$

$$\frac{dLL}{d\beta} = 0$$

d_{in}: 個人nが選択肢iを選択したとき1, そうでないとき0

→未知パラメータに関して最大化

6.2 離散選択モデルの推定

パラメータの検定

t検定

・それぞれの係数が0から統計的に有意に離れているかどうか
→各説明変数が効用値に影響を与えているかどうか

$$t = \left| \frac{\beta}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| \geq 1.96$$

t値 ≧ 1.96 であれば十分0から離れている (有意水準5%で)

尤度比

尤度$L(\beta)$

1 ・完全情報モデル (予測が全て的中)
$P_n(i) = 1$

$L(\beta^*)$ ・最大尤度モデル

$L(0)$ ・無情報モデル (当てずっぽう)
全てのβ=0

尤度比T: $T = -2(\ln L(0) - \ln L(\beta^*))$

→カイ二乗分布に従う
(“真のモデルは無情報モデル”という帰無仮説)

対数尤度の差を用いた適合度指標

$$\rho^2 = 1 - \frac{\ln L(\beta^*)}{\ln L(0)} \quad (0 < \rho^2 < 1)$$

→経験的に, 0.2以上あればよい

予測と集計化

交通行動に離散選択モデルを適用する目的

1. 個人の行動をシステマティックに理解
→推定されたパラメータから知る

2. 交通現象の予測
→非集計レベルで推定したモデルを集計化

弾性値

$E_{x_{ink}}^{P_n(i)}$ 個人nの選択肢iのk番目の属性値に対する**直接弾性値**

(ex: 鉄道iの運賃x_{ink}改正)

$$E_{x_{ink}}^{P_n(i)} = \frac{\partial P_n(i)}{\partial x_{ink}} \frac{x_{ink}}{P_n(i)} = \{1 - P_n(i)\} x_{ink} \beta_k$$

$E_{x_{ink}}^{P_n(i)}$ 個人nの選択肢iのk番目の属性値に対する**交差弾性値**

(ex: バスjの運賃x_{jnk}改正)

$$E_{x_{ink}}^{P_n(i)} = \frac{\partial P_n(i)}{\partial x_{jnk}} \frac{x_{jnk}}{P_n(i)} = -P_n(j) x_{jnk} \beta_k, \; j \neq i$$

数え上げ法 (総当たり法)

$$S(i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} P_n(i), (i = 1, \ldots, J)$$

$S(i)$: 選択肢iのマーケットシェア
$P_n(i)$: 個人nの選択肢iに対する選択確率
N: サンプル数

6.4 IIA特性をもたない離散選択モデル

IIA特性 (independence from irrelevant alternatives)

2つの選択肢の選択確率の比: $$\frac{P_{鉄道n}}{P_{バスn}} = \exp(V_{鉄道n} - V_{バスn})$$

→ ・確定効用Vにのみ影響を受ける
・選択肢集合に含まれる他の選択肢 (車, 徒歩...) の影響を受けない

$\Bigg\}$ <u>IIA特性</u>

IIA特性の長所

・選択肢の全集合を考える必要がない (一対比較でよい)

・選択肢の部分集合 (ランダムサンプリング) を用いた推定でも,
パラメータ推定値にバイアスが生じない
(選択肢集合が大きい or 不確定な場合)

→ 代替案の追加や削除が容易

IIA特性の短所 ~赤バス・青バス問題~

Before

個人n

$V_{赤バス} = V_{車}$

赤バス　車

$P_n(i)$　1/2　1/2

青バス新規参入

$V_{赤バス} = V_{青バス}$

After

個人n

赤バス　青バス　車

$P_n(i)$　1/3　1/3　1/3

$P_n(バス) = 2/3$

$V_{バス} \neq V_{車}$??

直感的には$P_n(i) = 1/4$　1/4　1/2

原因: 選択肢間の確率効用項 $(\varepsilon_{赤バス}, \varepsilon_{青バス})$が独立であるという仮定の誤り

→ 確率効用項の相関構造を考慮したモデルの適用

6.4 IIA特性をもたない離散選択モデル

GEVモデル

個人nがJ個の選択肢をもち, それが$B_n^1,\ldots,B_n^K$というK個のサブグループをもつ

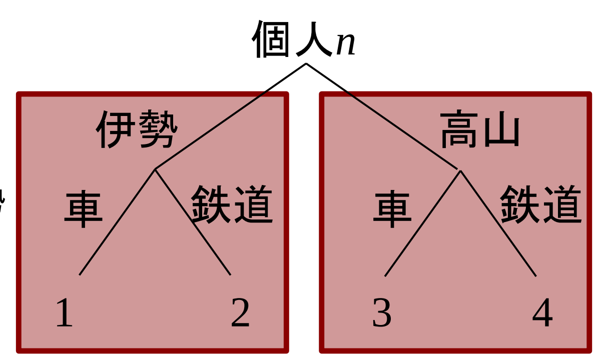
λ_k: サブグループ内の相関の程度を表すパラメータ $(0 \leqq \lambda_k \leqq 1)$
($\lambda_k = 1$のとき, 無相関なロジットモデル)

$$P_n(i) = \frac{\exp\left(\dfrac{V_{in}}{\lambda_k}\right)\left(\displaystyle\sum_{j \in B_n^k} \exp\left(\dfrac{V_{in}}{\lambda_k}\right)\right)^{\lambda_k - 1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{j \in B_n^k} \exp\left(\dfrac{V_{in}}{\lambda_k}\right)\right)^{\lambda_k}}$$

サブグループB_n^Kについて

具体例

サブグループ$B_n^{伊勢}$



$B_n^{高山}$

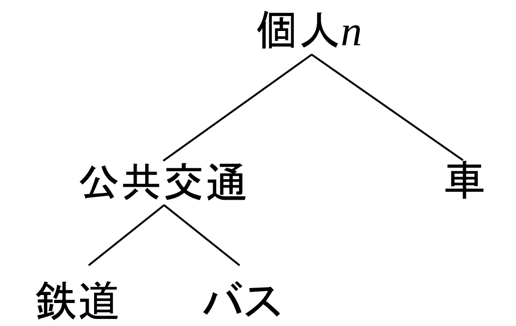
$K = 2$

$J = 4$

ネスティッドロジットモデル

最初にグループgを選択し, 次にそのグループの中の選択肢mからひとつ選択する, というモデル

$$\boxed{P(g, m) = P(m|g)P(g)}$$



グループの選択肢g: g = {公共交通, 車}
交通手段の選択肢m: m = {車, 鉄道}

与えられたグループgの中から交通手段mを選択する確率

$$P(m \mid g) = \frac{\exp(V_m)}{\sum_{m' \in \{\text{鉄道}, \text{バス}\}} \exp(V_{m'})}$$

グループgを選択する確率

$$P(g) = \frac{\exp(\Lambda_g)}{\sum_{g' \in \{\text{公共交通}, \text{車}\}} \exp(\Lambda_{g'})}$$

ログサム変数Λ_g (μ_g: 未知パラメータ)

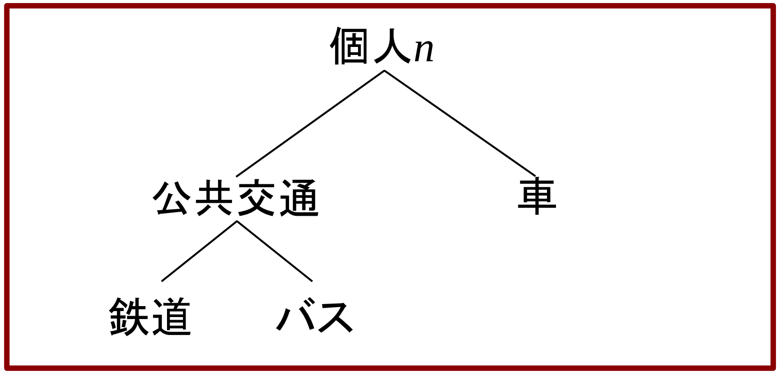
$$\Lambda_g = \frac{1}{\mu_g} \log\left(\sum_{m \in \{\text{鉄道}, \text{バス}\}} \exp(\mu_g V_m) \right)$$

→グループgに含まれる交通手段から得られる効用の最大値の期待値

$$Cov(U) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{自動車} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} & \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2_{\text{公共交通}} & 0 \\ \sigma^2_{\text{公共交通}} & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

誤差項同士の相関を表す
共分散行列$Cov(U)$

ミックストロジットモデル (MXL)



プロビットモデルの誤差構造と,
ロジットモデルの操作性を兼ね備えたモデル

$$
\begin{array}{l}
U_{\text{鉄道}} = \\
U_{\text{バス}} = \\
U_{\text{車}} =
\end{array}
\underbrace{\begin{array}{l}
\beta X_{\text{鉄道}} \\
\beta X_{\text{バス}} \\
\beta X_{\text{車}}
\end{array}}_{\text{確定項}V}
\begin{array}{c}
+ \\ + \\ +
\end{array}
\underbrace{\begin{array}{l}
\eta_{\text{鉄道}} + \nu_{\text{鉄道}} \\
\eta_{\text{バス}} + \nu_{\text{バス}} \\
\eta_{\text{車}} + \nu_{\text{車}}
\end{array}}_{\text{誤差項}\varepsilon}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{自動車} \end{array} & & \begin{array}{ccc} \text{鉄道} & \text{バス} & \text{自動車} \end{array} \\
Cov\,(U) = & \begin{array}{c} \text{鉄道} \\ \text{バス} \\ \text{自動車} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2_{\text{公共交通}} & 0 \\ \sigma^2_{\text{公共交通}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \\
\varepsilon = & & \eta & + & \nu
\end{array}
$$

$$\Lambda(i \mid \eta) = \frac{e^{\beta X_i + \eta_i}}{\sum_{i'}^{J} e^{\beta X_{i'} + \eta_{i'}}}$$

i: 交通手段 ($i = 1, 2, \ldots, J$)

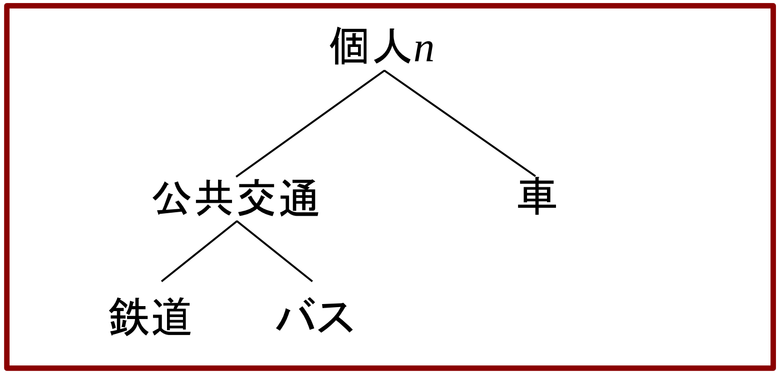
$$P(i) = \iiint_{\eta} \Lambda(i \mid \eta) f(\eta) d\eta$$

→ シミュレーション法によって近似解を算出

6.4 IIA特性をもたない離散選択モデル

多項プロビットモデル (MNP)

εは互いに分散が異なり, 相関をもつため
一般的に用いることが出来る



$$
\begin{aligned}
U_{鉄道} &= \beta X_{鉄道} + \varepsilon_{鉄道} \\
U_{バス} &= \beta X_{バス} + \varepsilon_{バス} \\
U_{車} &= \beta X_{車} + \varepsilon_{車}
\end{aligned}
$$

$$
Cov\,(U) = \begin{array}{c} \\ 鉄道 \\ バス \\ 車 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 鉄道 & バス & 車 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\sigma_{鉄道}^2 & \sigma_{鉄道,バス} & \sigma_{鉄道,車} \\
\sigma_{鉄道,バス} & \sigma_{バス}^2 & \sigma_{バス,車} \\
\sigma_{鉄道,車} & \sigma_{バス,車} & \sigma_{車}^2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{J-1} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon^T}{\Sigma}\right)\right)
$$

$$
\Sigma = \begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1J} \\
\sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2J} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sigma_{1J} & \sigma_{2J} & \cdots & \sigma_J^2
\end{pmatrix}
$$

$$
P(i) = \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_1} \cdots \int_{\varepsilon_i=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_i} \cdots \int_{\varepsilon_J=-\infty}^{\varepsilon_i+V_i-\varepsilon_J} \phi(\varepsilon)\, d\varepsilon_J \cdots d\varepsilon_1
$$

→ パラメータ推定が困難
(近年はシミュレーション法が進展)