

ネットワーク分析

2017スタートアップゼミ#2

2017/4/10

B4 植田瑞貴

目次

1. 分析の前に

2. グラフ理論

グラフ理論の基礎

行列表現とその演算

特殊なグラフ

3. 中心概念のモデル

グラフ理論による中心概念モデル

地位中心モデル

新しいタイプの中心性モデル

集団の中心化傾向のモデル

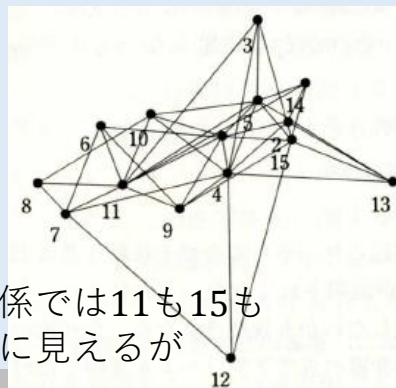
4. 実用例

分析の前に

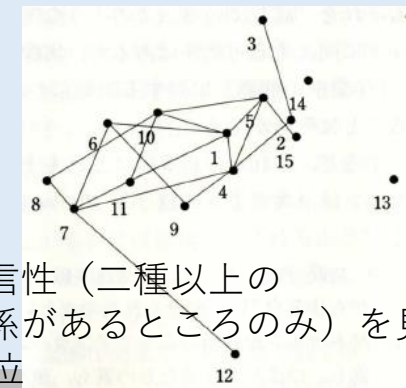
何を考えるのか

具体例：ネットワーク分析とはなにか

- 各人を点，相互作用（会話，仕事援助，金銭援助）のリンクを線で表すと，人間関係も分析できる
 - つながりが多い11番アブラハムと少ない15番ドナルド
 - ドナルドの上司であるアベル9番は事情聴取を行った職場委員のロトソン4番との結びつきがある
 - 11番アブラハムと15番ドナルドが口論になったとき，批判するのはアベルでなくドナルド
- ドナルドは敗れる



単なる交換関係では11も15も大差ないように見えるが



多重送信性（二種以上の交換関係があるところのみ）を見ると11が優位

構造を表現する (行列)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1, Damian	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
2, Godfrey	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
3, Soft	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4, Lotson	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
5, Jackson	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
6, Joshua	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
7, Andrew	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
8, Henry	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
9, Abel	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10, Maxwell	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
11, Abraham	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
12, Stephen	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
13, Noah	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14, Benson	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
15, Donald	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0

- 要素アクターを p で示すと、

$$P = \{p_i \mid p_i \text{はアクター}\}$$

- アクターの間で取り結ばれた関係を R とすると

$$R = \{ \langle p_i, p_j \rangle \mid \text{アクター } p_i \text{ がアクター } p_j \text{ に関係をもつ} \}$$

- 社会構造のオブジェクト S は、 P 、 R の順序集合

$$S = \langle P, R \rangle$$

と表される

(補) 分析におけるモデル化

多変量化

リンクの有無でなく、強度を
数値化

会話の頻度など

モードの導入

何によって社会ネットワーク
が定義されるのかの参照軸

(アクターが組織に所属して
いる場合に) 組織群をもう一
つのモードとするなど

複合関係化

違う種類の関係を同時に扱う
会話 + 仕事の援助など

ダイナミック化

時間軸を導入し変化を扱う

メンバー規模が変化する場合は
モデル構築が難

社会関係のカテゴリー化

社会ネットワークが属性に
よって組織される

国籍, 出身地, 宗教など

(補) ネットワーク分析理論の発展段階

・グループ・ダイナミクス研究

個人から創発し、それ自体の实在性を持つ社会的实在としての集団に注目

集団の性質、集団の発達の法則、集団と個人の関係、集団と集団の関係、集団と制度の関係を、リーダーシップ、社会的勢力、社会的規範、地位、コミュニケーション、集団の雰囲気、社会的影響、伝播などに注目しながら社会調査や実験を含めた実証的アプローチによって研究

・ザイドマン/フォスター

閥 (クリーク) に関する定式化

非常に密に結合した「凝集的な下位集団」...党内の派閥など

グラフ理論では、「すべての点からほかのすべての点に結合している」ような部分グラフで表される

閥の定義が非常にきつかった（全員が自分以外の全員と繋がっている集団はそうそうない）ため、改良

→**k-プレックス**：ネットワークの構成員が n 人いて、それぞれの成員が $n-k$ 人との結合を持っている

(補) グラフ理論のその先

- ハーバード学派

ブロックモデル

- ① グラフ理論に代わり、圏論、群論、半群論などの数学を利用しネットワークの厳密な関係構造を表現
- ② CONCOR という列総半反復法アルゴリズム開発

複雑な社会関係のシステムを構造的に意味のある程度まで単純にし、それをブロックに分割

構造的なポジションを確定し、そのポジションのメンバーを同定すると同時に、ポジション間の関係を表す

グラフ理論

グラフ理論の基礎

必要な数学

グラフとは

- ネットワーク分析は数学的な基礎を基にした技法の体系である
→グラフ理論

グラフ G は、
 p の点と q の互いに素な点の非順序対からなる集合 E をもった、
空でない有限集合 $V=V(G)$ から構成される。
このとき G は位数 p 、規模 q をもつという。

つまり

グラフ G は、 p の点と q の互いに素な点の非順序対からなる集合 E をもった、空でない有限集合 $V=V(G)$ から構成される。このとき G は位数 p 、規模 q をもつという。

- 非順序対

任意の集合 a 、 b に対して、 a と b だけを要素とする集合のことを $\{a, b\}$ と記し、 a 、 b の非順序対という。
簡単にいえば、並び方を問わない二つのものの組。

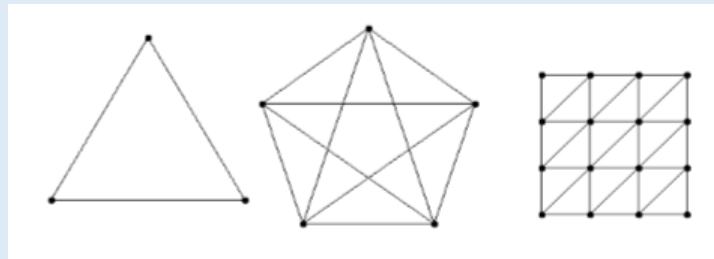
- 位数

要するに集合の元の数のこと。

→頂点の数が「位数」

- 規模

互いに素な点の組の数



...点の集合が、グラフ

辺と次数

辺(edge)

E における点の対 $e=\{u,v\}$

” e は u と v を結合している”

” u と v は隣接点である”

”辺 e は u,v に接続的である” という

(p,q) グラフ： p の点と q の辺をもつグラフ

次数

ある点が隣接する他の点の数

・ 次数列

各点の次数を降順に並べたもの

グラフを一意的に決定する

※次ページにて証明

グラフは、頂点の集合 V と辺の集合 E の対として $G=\langle V,E \rangle$ と表現される。

また、

$V(G)$ ：グラフ G の点の集合

$E(G)$ ：グラフ G の辺の集合 と書く。

(補) 定理と証明

握手補題

- 任意のグラフにおいて, 次数の総和は辺数の2倍に等しい.
- 証明. グラフにおいて, 各頂点の次数をすべて足す. すると, 各辺はちょうど2回ずつ数えられたことになる.

奇点定理

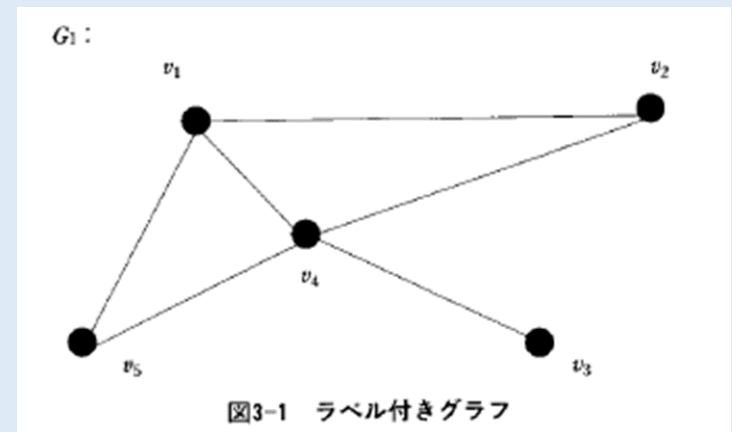
- 任意のグラフにおいて, 次数が奇数の点(奇点)は偶数個存在する.
- 証明. 握手補題より, 次数の合計は偶数である. 奇次数の頂点が奇数個あれば, 次数の合計が奇数になってしまう. これは矛盾である.

和が偶数である任意の非負整数列 $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とする多重グラフが存在する.
証明. d_1, \dots, d_n のすべてが偶数のとき, 頂点 v_i に $d_i/2$ 本のループを接続させればよい. そうでない場合, 一般性を失うことなく d_1, d_2, \dots, d_{2h} が奇数としてよい. このとき, 数列 $d_0 = (d_0^1, \dots, d_0^n)$, ただし, $d_0^i = \begin{cases} d_i - 1 & (i = 1, \dots, 2h) \\ d_i & (i = 2h + 1, \dots, n) \end{cases}$ は偶数のみからなる. 上の構成により, $\deg(v_i) = d_0^i$ なる多重グラフが得られるので, それに h 本の辺 $v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2h-1}v_{2h}$ を加えることにより, 図1.9のように次数列 d の多重グラフが得られる.

隣接行列(adjacency matrix)

- 点どうしの結合がある：1， ない：0

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- 次数は各行か各列の和
- 次数列{4.3.2.2.1}

(補) 基本用語

歩道：点と辺が代わる代わる連続したもの

歩道の長さ：辺の出現回数

小道：同じ辺が二度以上現れない歩道

道：同じ点が二度以上現れない歩道

点 u で始まり、 v で終わる歩道を uv 歩道と呼ぶ

uv 歩道において、 $u=v$ であるような歩道を"**閉じている**"という

閉小道：閉じた小道

回路：自明でない閉小道

閉路：点がすべて異なる回路

無閉路グラフ：閉路を含まないグラフ

連結グラフ

グラフGにおいて、どの2点u-vの間にも道が存在:Gは**連結**
そうでない場合:**非連結**

グラフとは、部分的グラフが連結してできたものである

距離 : u,v間の道の長さの最小値

→その道のことを**測地線**という

距離行列 : 各点間の距離を測定し、それを行列にまとめたもの

直径 : 行列の成分の最大値

(補) 密度

- 規模 n のグラフ G の**密度**

$$d(G) = \frac{m(G)}{m(K_n)}$$

$m(G)$: グラフ G の辺の数

$m(K_n)$: 点が n からなる完備グラフの数

完備グラフ：グラフの各点からすべてのほかの点に辺が存在する

(補) 誘導部分グラフ

U を $V(G)$ の空でない点の部分集合とする.

" U によって誘導される" G の**部分グラフ** $\langle U \rangle$: 点集合 U をもち、かつ U の二点に接続している G の辺のすべてからなる辺集合をもつグラフ

点誘導部分グラフ (誘導部分グラフとも)

U に対して $H \cong \langle U \rangle$ であるときの, $H \rightarrow H \langle G$

※ \langle は「半順序」, 不等号を一般化した概念

辺誘導部分グラフ: 点誘導部分グラフと同様

ダイグラフD（有向グラフ）：グラフの種類

方向をもつグラフ

→点の対を”辺”ではなく、Dの”弧”とよぶ

出ていく弧の数・・・**出次数**

入ってくる弧の数・・・**入次数**

→隣接行列において、出次数は各行の和、入次数は列の和

通路と到達

長さ r の通路： $r+1$ 個の点が弧（互いに方向がある）でつながっている系列

長さ r の半通路： $r+1$ 個の点が方向を無視してつながっている系列

r -到達可能： 点 i から点 j へ、長さ r 以下の通路が存在する状態
ダイグラフにおける距離行列の成分 = 最短の通路の長さ

連結度

- **連結度 $k(D)$** (点-連結度)

その点を除去するとダイグラフの連結性が失われてしまうような最小の点の数

- **辺-連結度 $k'(D)$**

その辺を除去するとダイグラフの連結性が失われてしまうような最小の辺の数

切断点

除くと連結が切れてしまう点

橋辺

除くと連結が切れてしまう辺

推移性

点AからB、BからCに結合関係があり、さらにAからCにも関係がある

→関係が推移的であると集団の結合はより強固に

推移度

$$Tran(D) = \sum (A^2 \times A) / \sum (A^2 - diag A^2)$$

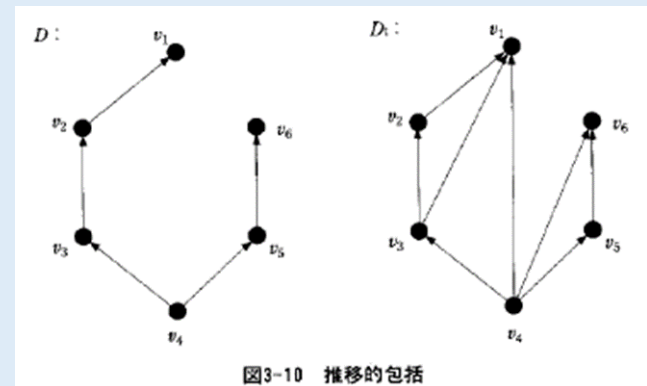
AはダイグラフDの隣接行列

$diag A^2$ は A^2 の対角行列の出力.

推移的包括Dt

間接的な結合関係を直接的な結合関係に変換

ダイグラフDにおいてuとvの間に長さ2の通路があるとき、そのたびにDに存在しない弧をできなくなるまで追加していったときに得られる最小の推移的なダイグラフのこと



到達可能の観点からの結合の分類

- **弱r-結合**（弱結合）：点iと点jの間に長さr以下の半通路が存在
- **片方r-結合**：点iと点jの間に長さr以下の通路が存在
- **強r-結合**：点iと点jおよび点jと点iの間に長さr以下の通路が存在
- **再帰r-結合**：点iと点jおよび点jと点i間に長さr以下の通路が存在し、それらが同じ点を使う逆の順番の通路が存在

結合の強さ・・・弱<片方<強<再帰

「強さ」とは、「重要性」である

連結成分

ダイグラフ全体が4種の結合で特徴づけられるとき、そのダイグラフは、それぞれ弱、片方、強、再帰的に連結したダイグラフとよばれる

またダイグラフの部分がそれ以上の規模が大きくなならない結合で特徴づけられるとき、それをその結合の**連結成分**とよぶ

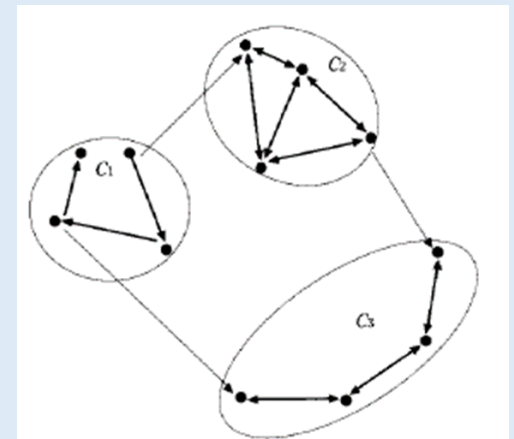
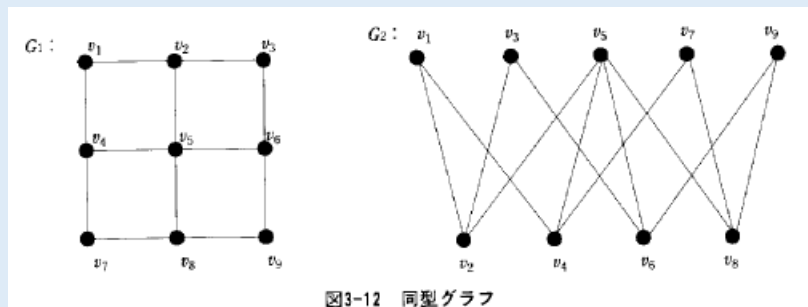


図3-11 3つの連結成分からなるダイグラフ

行列表現とその演算

行列

- 社会構造を一意的に記述する隣接行列
- 形が異なって見えるグラフが実際は構造が同じ...隣接行列表現では一意



→
同じ

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

行列演算

• 行列Cの(i, j)成分を $(C)_{ij} = C_{ij}$ と表す.

• 和 $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

• 差 $(A - B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

• 積 $(A \times B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$

Aが $m \times n$, Bが $n \times r$ のとき, $AB=C$

つまり $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

行列演算

• 転置 行列の行と列を逆にしたもの

• **プール演算** ※おそらくブール代数演算と同義

整数 0, 1 上に定義される 2 進法の演算

x, y を非負の整数とすると, 和を $(x+y)\#$ と表記し, その和は 0 か 1 である

$2\# = (1+1) = 1, 3\# = 1$ となる

さらに $(2+3)\# = 1$ である

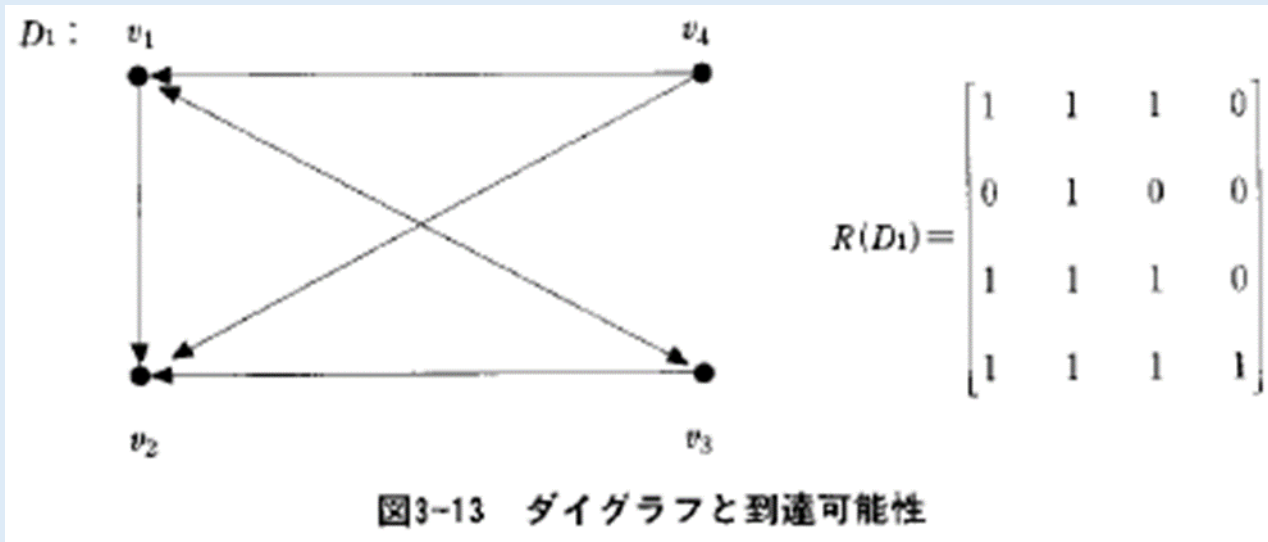
※ブール代数演算

$1+1=1, 1+0=1, 0+1=1, 0+0=0, 1*1=1, 1*0=0, 0*1=0, 0*0=0$

到達可能性行列

点*i*が点*j*に到達可能であるとき $r_{ij} = 1$,
そうでないとき0であるような行列 ただし $r_{ii} = 1$

隣接行列とプール演算を利用すると計算ができる



(補) 到達可能性行列の求め方

隣接行列を n 乗すると、その i, j 成分が点 i から j への長さ n の歩道の数になる

[定理]

隣接行列 A をもった(ダイ)グラフにおいて、 A^n の i, j 成分は点 i から j への長さ n の歩道の数を表す。

隣接行列を累乗する(プール演算を利用)と、到達可能性行列が得られる(かも)

可到達行列を計算するために、まず隣接行列 A に単位行列 I を加える

この行列 $A+I$ をブール代数演算のもと、次の状態が得られるまで r 回数分の乗算を繰り返す。

$$(A+I)^{r-1} \neq (A+I)^r = (A+I)^{r+1}$$

このとき $(A+I)^r = (A+I)^{r+1} = T$ とおくと、この T が可到達行列

[定理]

隣接行列 A^n の i, j 成分 a_{ij}^n はダイグラフ D の点 i から j への長さ n の歩道が少なくとも1本あるときには、その時に限って1である。

n ステップまで到達可能かどうかを表す到達可能性行列を与える

...限界到達可能性行列

※ここでいう到達可能性行列=可到達行列と考えられる

距離行列

(ダイ) グラフにおける最短通路の長さを与える

[定理]

各正の整数 n に対して,

$$R_n = (I + A + A^2 + \dots + A^n)\# = (I + A^n)\#$$

また,

$$R = (I + A + A^2 + \dots + A^{p-1})\# = (I + A^p)^{p-1}\#$$

これを使うと距離行列が求まる.

距離行列の求め方

- 1 すべての対角で $d_{ii} = 0$
- 2 $r_{ij} = 0$ (点同士の結合なし) なら $d_{ij} = \infty$
- 3 d_{ij} は, $A^n\#$ において, $a_{ij}^n\# = 1$ となっているような最小ステップ数

$$N(D_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & \infty \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

特殊なグラフ

重み付きグラフ

弧にあらゆる種類の値が与えられるダイグラフ

- 2つの終点ネットワーク N はダイグラフ D からなり、それは2つの相異なる点 s, t と、 D の弧上に負でない実数関数 c を伴う
- s : ネットワークの入口 t : ネットワークの出口 他の点: 内部点
- また、弧 $e \in N$ それぞれに対して、 $c(e)$ で表される値 $\cdot e$ の容量が与えられる

流れ（フロー）

N の弧に負でない実数を与えたもの

1. それぞれの弧の値は，その容量を超えてはならない
2. s, t 以外の各点に対して， $\text{in}=\text{out}$

- s - t の切断集合：入口 s と出口 t を分離する弧の集合
- 集合の容量：各要素である弧の容量の総和
もっとも容量が少ないものが"最小切断容量"

最大ネットワーク・フロー： s - t を流れうる最大値

最大フロー行列：点対に対して最大ネットワークフローを求めたもの

最高到達可能性

- ここで、2つの重み付きグラフで表される社会ネットワークにおいてまず要素ごとに最小値を選び、それからその中の最大値を選ぶという演算を定義すると、重み付きグラフの道に関する値を与えるという操作を定義できる

[定理] W を重み付きグラフ、 A をその隣接行列とする。そのとき $A * A \dots A = A^p *$ は W の各点対の間の p ステップの歩道の最高レベルを与える

→各ステップでの道の重みが求められる

[定理] 行列 $T = \bigvee_{p=1}^n P^p *$ はすべての点対の間の最高到達可能レベルを与える

→ $A^n *$ を **ドレイアン・ベキ** とよぶ

※ *: 複素共役ではなく別の概念

バイグラフ

実数値に限らず様々な値を扱えるように拡張
→重み付きグラフの一般化

[[定義]]有値ダイグラフ V は、 p 個の点をもち、各弧に値が与えられているダイグラフであり、それは値域 Q の要素である。このとき値は実数値でなくてもよい。

V に対する有値行列 M の成分、 m_{ij} は点 i から点 j までの弧の値である。

(補) 一般的諸条件と諸条件を満たす演算

二項演算の一般和 (\oplus)、一般積演算 (\otimes)、一般和の単位元 ($\bar{0}$)、一般積の単位元 ($\bar{1}$) が定義され、以下の条件が満たされたとき、特殊な演算について各種のr-到達度が求められる。

条件 1 : Q が \oplus, \otimes に関して閉じていること

条件 2 : \oplus, \otimes が結合的で交換的であること

条件 3 : Q のすべての a, b, c に関して \otimes が \oplus に対して右分配的で、
 $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$

条件 4 : Q は、そのすべての要素 a に対し \oplus に対する単位元 $\bar{0}$ を有し、
 $\bar{0} \oplus a = a, \bar{0} \otimes a = a \otimes \bar{0} = \bar{0}$

条件 5 : Q は、そのすべての要素 a に対し \otimes に対する単位元 $\bar{1}$ を有し $\bar{1} \otimes a = a$.

条件 6 : V のすべての隣接しないような点 i と点 j に対し $m_{ij} = \bar{0}$.

条件 7 : M のすべての対角成分は $\bar{1}$ に設定される。つまり $1 \leq i \leq p$ に対し $m_{ii} = \bar{1}$

条件 8 : Q のすべての a, b に対して $a \oplus (a \otimes b) = a$

$\{\min, \max, \infty, -\infty\}$ 、 $\{U, \cap, \varphi, R\}$ という演算体系もある

(補) ハイパーグラフ

点と線の異なるモードに関する数学グラフ

[[定義]] 点の集合 X に対し、ハイパーグラフは X の上に定義される辺の集合である

→点が辺に属している様を表現したもので、点が多重的に辺に接続している関係を表現している

接合行列：どの点がどの辺を構成するかという接続関係を行列式で表現したもの

各成分は接続があれば1，なければ0

※モードは最頻値のことではなく、
スライド6に登場したもの

中心概念のモデル

中心性分析

グラフ理論による中心概念モデル

グラフ理論による中心概念モデル

モデル化の対象

- 次数センター：送信性
- グラフ・センター， メジアン：接近のしやすさ
- 切断センター， 媒介センター， フロー・センター：結合の脆弱性

次数センター：送信性

次数中心性によって定義される最も単純な中心モデル

点 v_i の次数 $\text{deg}(v_i)$ は点に**接続する辺の数**
そのまま中心性の尺度と見なされる

• 次数中心性 C_d

$$C_d(v_i) = \frac{\text{deg}(v_i)}{n - 1}$$

グラフ・センター：接近のしやすさ

連結グラフ G の点 v に対し、 v から最も遠い点までの距離を**離心数**
 $e(v)$ と定義する

$\rightarrow e(v) = \max\{d(u,v) : u \in V\}$ と表される。ただし $d(u,v)$ は u,v 間の距離

半径 $r(v)$ ：点の最小離心数 **直径** $d(v)$ ：点の最大離心数

$e(v) = r(v)$ ならば

$\rightarrow v$ は中心点。すべての中心点の集合：センター $C(G)$ と定義

$e(v) = d(v)$ ならば

$\rightarrow v$ は周辺点。すべての周辺点の集合を周辺として定義

離心数は、距離行列の各行の最大値

メジアン：接近のしやすさ

連結グラフGに対してのみ適用

点vのステイタスs(v)：vからGの他の点までの距離の総和

グラフGのメジアンM(G)：最小のステイタスをもつ点からなる集合
→施設配置などに有効

近接中心性 C_c ：ある1点から他の1点のステイタス（の平均？）の
逆数

$$C_c(v_i) = \left(\frac{s(v_i)}{n-1} \right)^{-1} = \frac{n-1}{s(v_i)}$$

都市における例

グラフ・センター：「遠すぎる人がいないように施設配置決定」

メジアン：「社会の総効用が高くなるよう施設配置決定」

切断センター：脆弱性

切断数 $c(v)$ ： u と w が $G-v$ の異なる成分の中にあるような
点对 $\{u,w\}$ の数

切断センター $CC(G)$ ：最大の $c(v)$ をもったすべての点か
らなる集合

イメージとしては、それをなくすことによって
解除される連結の数

媒介センター：脆弱性

- **媒介値** $b_{ij}(v_k)$ ：点 v_i と v_j の各対に対して v_k の媒介値は、 $v_i - v_j$ 測地路の総数に対する、点 v_k を含む $v_i - v_j$ 測地路の比率
- **媒介中心** $BC(v_k)$ ：すべての対 i, j に対する媒介値 $b_{ij}(v_k)$ の総和
- **媒介中心** $BC(G)$ ：最大媒介値を持ったすべての点の集合

媒介中心点の媒介値が最大になるとき、分母は確定して、

$$C_b(v_i) = \frac{2BC(v_i)}{n^2 - 3n + 1}$$

フロー（媒介）・センター

媒介センターの拡張

フロー中心性 C_f

「 $v_i - v_j$ を通る総フローに対する、点 v_k を含む $v_i - v_j$ を通るフローの比率」について、1から n までの異なる点 i, j に対して総和をとる

$$C_f(v_k) = \frac{\sum_{i < j}^n \sum f_{ij}(v_k)}{\sum_{i < j}^n \sum f_{ij}}$$

流れる道の数ではなく、そこを流れる「量」に注目したモデル

地位中心モデル

パワーと権威づけ

カッツ-ハベル・モデル

- N をアクターの数, A をソシオマトリクスとする
- A は選択関係数なので, その転置行列 A' は選択される関係数を表す

※ソシオマトリクス：集団成員に一定の基準に基づいて, 選択（牽引）あるいは排斥（反発）の感情を抱く他成員を指名させることによって, 個々の集団成員の選択・排斥関係, 集団全体の構造あるいは組織化の過度を測定し, 診断し, 改善の手掛かりを得る人間関係テストののち作られる, 選択者と非選択者, 拒否者と非拒否者に分けて縦と横に並べてクロスさせた表.

u を次元 k の単位ベクトルとすると, アクター i の地位(ステイタス)は次のように表せる

$$s_i = A'u$$

...選択されるものほど中心性が高い

カツツ中心性

緩和パラメータ α の導入

→近い結合を高く、遠い結合ほど低く重み付け

$$s_i = \alpha A + \alpha^2 A^2 + \dots + \alpha^N A^N = (\alpha A)^q$$

ただし $0 < \alpha < 1$

Iを単位行列として

$$s_i = (\alpha A + \alpha^2 A^2 + \dots + \alpha^\infty A^\infty)'u = [(I - \alpha A)^{-1} - I]'u$$

実際のスコア計算には s_i はその統計的に漸近される可能性結合数

$$m = (n - 1)! \alpha^{n-1} e^{\frac{1}{\alpha}} \quad n \text{はアクター数}$$

※ α は恣意的で、値によっては収束しなかったりマイナスのステータススコアが出ることも

→選択される人のランクが高いほど、またそのような人と直接結合しているほど、その人を選択する人のもつ地位が高くなる

ハベル中心性（地位中心性モデル）

選択者の地位と，選択する強度の両方を考慮したモデル

$$s_i = e_i + w_{i1}s_1 - w_{i2}s_2 + \dots + w_{in}s_n$$

e_i ：グループ外部からこのシステムに導入される地位への貢献分

$w_{ij} \leq 0$ ：アクター*i*が*j*を選択する結合強度

s_i ：アクター*i*の地位（ステイタス）・スコア

w_{ij} は行に関して行和が0.5になるよう正規化したものである

→選択される人のランクが高く，またそのような人と直接結合しているほど，またその選択の強度が高いほど，その人を選択する人の持つ地位が高くなる

ハベル中心性を測定し，最大スコアで正規化（もっとも中心的なものが1で表される）

他モデルとの差

カツツ・モデルより優れている点

- 二項的なものだけでなく、有値のネットワーク・データを扱える
- 恣意的に α を調整することなく、 w_{ij} によって収束が保証されている
- 非対称的なネットワーク（ダイグラフ）でも扱える

グラフ理論的モデルとの違い

周辺的なアクターでもそれが結合するアクターの中心性によって、スコアが与えられ（=0でなく）、結合するアクターの地位の高さによって中心性が異なっている

反復ハベルモデル：ハベルモデルの改良

- 外部要素である e の部分の入力値が、 $n-1$ 回目の反復値であるとする

一般に,

$$s_m = (I - R')^{-m+1}((I - R')^{-1}e - I)e$$

距離行列の最大値分だけ反復

→中心性 = パワー

(補) ソシオマトリクス固有ベクトルによって
中心性ベクトルを求める : カッツ-ハベルモデルの開発前のモデル

r_{ij} をアクター*i*が*j*を選択する結合強度、 c_i はアクター*i*の中心性、 c_j はアクター*j*の中心性、 λ を定数とすると、アクター*i*の中心性は*i*が*j*の強度で結合するアクター*j*の中心性に比例するというモデルは

$$\lambda c_i = \sum r_{ij} c_j, \quad c_j = \frac{\sum r_{ij} c_j}{\lambda} \text{で表せる。}$$

$$\text{行列では、} \lambda C = RC, \quad C = \frac{RC}{\lambda}$$

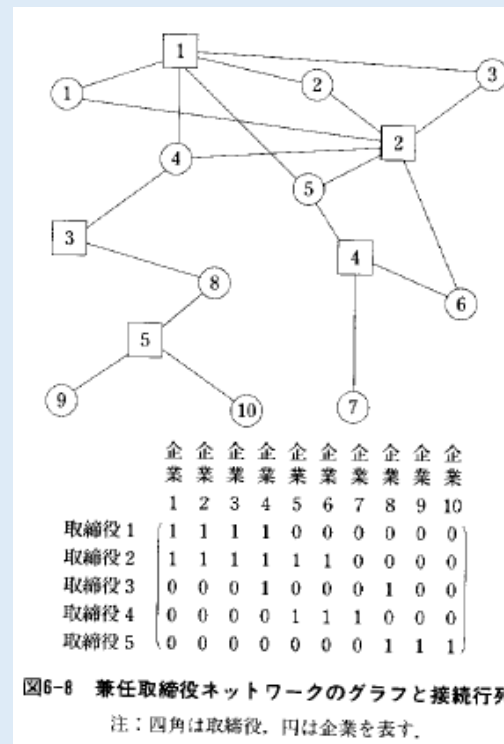
であるので、 C は R の固有ベクトルを、それぞれに対応する最大固有ベクトルで除することによって求められる。

ボナチッチ中心性モデル

企業*i*の取締役会の規模を*d_i*と表すとすると、企業*j*間の結合強度*r_{ij}*は通常、

$$r_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}} \quad \text{と定義される。}$$

これによりボナチッチの中心性スコアを求めると、バベル中心性とほとんど同じパターンを示していることが分かる。



b:企業*i, j*双方に所属する取締役の数

中心性の分解モデル

反射成分と導出成分の分解，アクターが中心性を獲得する様式

- ・ **導出中心性**：間接的な結合によって他のアクターから中心性を**引き出す**
- ・ **反射中心性**：直接結合するほかのアクターから反射的に**戻ってくる**ような中心性を獲得する

- ・ (準)ブリッジ

導出中心性の比重の高いもの

- ・ (準)ハブ

反射中心性の比重の高いもの

c_i の反射中心性は R の対角成分に注目し、

$C_{i,2R} = \frac{r_{ii}c_i}{\lambda^2}$ で表され、導出中心性は R の非対角

成分に注目し、

$C_{i,2D} = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N r_{ij}c_j}{\lambda^2}$ で表せる。

この2つの和がボナチチ中心性の全中心性なる。

$$\text{cf. } c_j = \frac{\sum r_{ij}c_j}{\lambda} = \frac{\sum_{i,j} r_{ij}c_j}{\lambda}$$

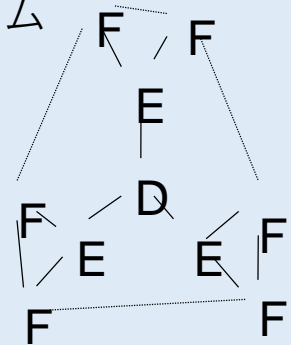
クックらの研究

交換ネットワークの分類

- **正結合ネットワーク**：一方の関係における交換が他方の関係における交換を促進する場合
- **負結合ネットワーク**：交換を阻害する場合
- **混合ネットワーク**：両者が入り混じった場合

パワーと構造的な中心性が一致しないことがある

実線間は24ポイント，破線間は8ポイントの交換を行う交渉ゲーム
→ゲームを進めていくと中心性の高いと思われるDではなく，
Eに蓄積していく



中心モデルの改良：パラメタ β の導入

中心性ベクトルを求める最初の式 $\lambda c_i = \sum_j r_{ij} c_j$ にパラメータ α と β を導入した式

$$c_i(\alpha, \beta) = \sum_j (\alpha + \beta c_i) r_{ij}$$

\mathbf{i} を1からなる列ベクトル、 \mathbf{I} を単位行列(すべての成分が1からなる行列)とすると、

$$c(\alpha, \beta) = \alpha(\mathbf{I} - \beta \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R} \mathbf{i}$$

ここで α は中心性のベクトル c の平方がネットワークの

アクターの数と一致するように選ばれるパラメータである。

β は「その内部で中心性を評価したいと思ふような半径」である。

例えば小さな β はローカルな構造を重視し、大きな β はグローバルな構造を重く見る。 β が \mathbf{R} の最大固有ベクトルの逆数の絶対値より小さいときには、

$$c(\alpha, \beta) = \alpha(\mathbf{R} \mathbf{i} + \beta \mathbf{R}^2 \mathbf{i} + \beta^2 \mathbf{R}^3 \mathbf{i} + \dots)$$

のような無限和になる $\rightarrow \beta$ によって長さ2以上の間接結合をさまざまに重みづけている。

なにが改良されたか

- (1) $\beta=0$ のとき、 $c(\alpha, \beta)=\alpha R_i$ なので、間接的結合を重みづけできず、通常の次数中心モデルと同値
 - (2) $\beta>0$ のとき、大きな β はグローバルな構造に、小さな β はローカルな構造に敏感になる
 - (3) $\beta<0$ のとき、 R の偶数ベキは負に、奇数ベキは正に重みづけられるので、直接的な結合は中心性に貢献するが、長さ 2 の間接的な結合は逆に中心性の減少に作用する
- ...構造の大きさのスケールに対応・直接的な結合と間接的な結合の区別

新しいタイプの中心性モデル

伝播中心性モデル

情報中心モデル

情報量を重み付きグラフで測定することによって、点の中心性を測定

情報の反意語：ノイズ

→「情報量」は「ノイズの量の逆数」または「推計値の分散の逆数」
ということは、ノイズを測定することで中心性が測定できる

連結グラフネットワークの点对 ij を結合するすべての道 $P_{ij}(s)$ において
「情報量」=通る信号のノイズの逆数 と考える

分散=ある1点から連結するほかの点への道の長さ (\neq 長さ自体)

...ネットワークにおけるすべての道の長さが求めれば情報量も計算できる

アクターの情報中心性は $P_{ij}(s)$ に各点 i が関わる度合いとして測定できる

重みづけ

合道：同じ点对を結合する道が複数存在する場合に、その道を最適に重みづけるもの

重みづけは各道の情報量の総和が合道の情報量に等しくなり、その和が1となるという意味において最適である。

ここで各道の重みを w とし、 k_{ij} を i と j を結ぶ道の数とすると、

$$p_{ij} = \sum_{s=1}^{k_{ij}} w_s p_{ij}(s), \quad \sum_{s=1}^{k_{ij}} w_s = 1$$

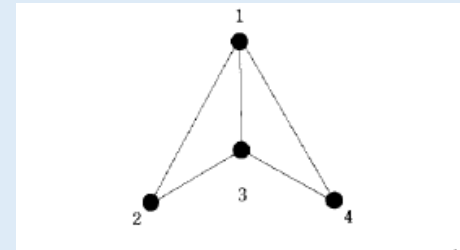


図6-12 情報中心性を例示するためのネットワーク

図の点1から4への道に関しては、

$$p_{14} = \frac{1p_{14}(1) + 1/2p_{14}(2) + 1/3p_{14}(3)}{1 + 1/2 + 1/3}$$

情報量 I_{14} は $1 + 1/2 + 1/3 = 1.83$

→その測地線より1.83倍の情報量を有している

システムの求心性と遠心性

統合性モデル（求心性）

ダイグラフの入次数に基づいて測定

当該個人の関係の受理がネットワークに統合している程度
のモデル化 列和

放射性モデル（遠心性）

ダイグラフの出次数に基づいて測定

どの程度多種多様なアクターにアクセス可能にするように
ネットワークに到達しているのかのモデル化 行和

いま、アクター k の統合性を $I(k)$ 、 RD_{jk} をアクター j, k の間の測地線から計算された「逆距離」、 N をネットワークのアクターの数すると、

$$I(k) = \frac{\sum_{j \neq k} RD_{jk}}{N-1} \quad \text{で表される。}$$

逆距離 RD_{jk} : jk 間の測地線の長さを g_{jk} 、ネットワークの直径を $diam$ としたとき、

$$RD_{jk} = diam + 1 - g_{jk}$$

(補) 相対モデル

相対的な尺度として、最大の逆距離によって正規化される相対モデルも提案されている

- 相対的な統合性が高いアクター：比較的容易に情報に接近
- 放射性の高いアクター：比較的容易に情報を送信

$$I'(k) = \frac{I(k)}{\max_{j,k}(RD_{jk})}$$

集団の中心化傾向のモデル

どの集団がもっとも中心に偏っているか

一般的モデル

n 人から構成されるネットワークにおける $C_A(p_i)$ をタイプAの中心モデルで測定。アクターの中心性 $C_A(p^*)$ を $C_A(p^*) = \text{Max} C_A(p_i)$ とすると、

$$\sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]$$

は、各個人の中心性の観測値の最大値からの差の総和である

先の実測値の偏差の合計をネットワークの数学的な性格上から理論的に考えられる最大の偏差で除した割合：正規化された**中心化傾向**

$$C_{A1} = \frac{\sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]}{\max \sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]}$$

※統計的な標準化の方法に依拠したモデル

観察された個人の中心性からその平均を減じ、アクター数で除する

$$C_{A1} = \frac{\sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]}{\max \sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]}$$

(補) 各中心モデルにおける中心化傾向の測定

一般モデルで $\max \sum_{i=1}^n [C_A(p^*) - C_A(p_i)]$ に入る式を求めると、各中心モデルに対して特殊化ができる

??

各モデルにおいて中心性の差が最大になるような場合を探索，中心性が最低の場合と最高の場合を考えればよい

次数モデル

$$\max \sum_{i=1}^n [C_C(p^*) - C_C(p_i)] = (n-2)(n-1) = n^2 - 3n + 2$$

次数中心モデルにおける中心化傾向のモデルは、

$$C_D = \frac{\sum_{i=1}^n [C_D(p^*) - C_D(p_i)]}{n^2 - 3n + 2}$$

※中心性が最大になる各点がもっとも中心的な点にのみ接続しているとき(次数1)と、中心のもつ最高の中心性は、中心が他のすべての点と隣接する場合(次数n-1)の差は(n-1)-1=n-2。この差を点i以外のn-1個の点についてそれぞれとり、すべて足し合わせる という操作

そのほかのモデル

$$\text{近接中心性} : C_C = \frac{(2n-3) \sum_{i=1}^n [C_C(p^*) - C_C(p_i)]}{n^2 - 3n + 2}$$

$$\text{媒介中心性} : C_B = \frac{\sum_{i=1}^n [C_B(p^*) - C_B(p_i)]}{n^3 - 4n^2 - 5n - 2}$$

$$\text{フロー中心性} : C_F = \frac{\sum_{i=1}^n [C_F(p^*) - C_F(p_i)]}{n-1}$$

$$\text{統合性} : I = \frac{\sum_{i=1}^n [I(p^*) - I(p_i)]}{n-1}$$

$$\text{放射性} : R = \frac{\sum_{i=1}^n [R(p^*) - R(p_i)]}{n-1}$$

個人と集団の中心性：下位集団の中心性モデル

下位集団の，外集団に関わる度合い

集団次数中心性：下位集団 S が S 以外の個人ともつ結合の数
非集団アクターの数で除されることで正規化される

- ・ 属性に関してもっとも中心性が高いグループ分けのための結合すべき相手の判定
- ・ 中心性の差の少ない標準的な集団の形成 などへ応用

集団の近接と媒介

集団近接中心性（≡距離）**モデル**：下位集団から外集団へのすべての点への距離の合計

これを外集団のアクターの数で除したものの逆数を求めることで正規化。

集団媒介中心性モデル

下位集団を S とし、 g_{ij} を $i-j$ 測地線、 $g_{ij}(S)$ を下位集団 S を通る $i-j$ 測地線とすると、集団媒介中心性 $GC_B(S)$ は

$$GC_B(S) = \sum_{i < j} \frac{g_{ij}(S)}{g_{ij}}; i, j \notin S$$

である。

$|V|$ を全アクター数、 $|C|$ を下位集団 S のアクター数とすると、 $GC_B(S)$ が理論的最大の場で正規化すると、

$$GC_B(S) = \frac{2GC_B(S)}{(|V| - |C|)(|V| - |C| - 1)}$$

となる。

慣例的に、

- ・ 距離の最小
- ・ 距離の平均
- ・ 距離の最大

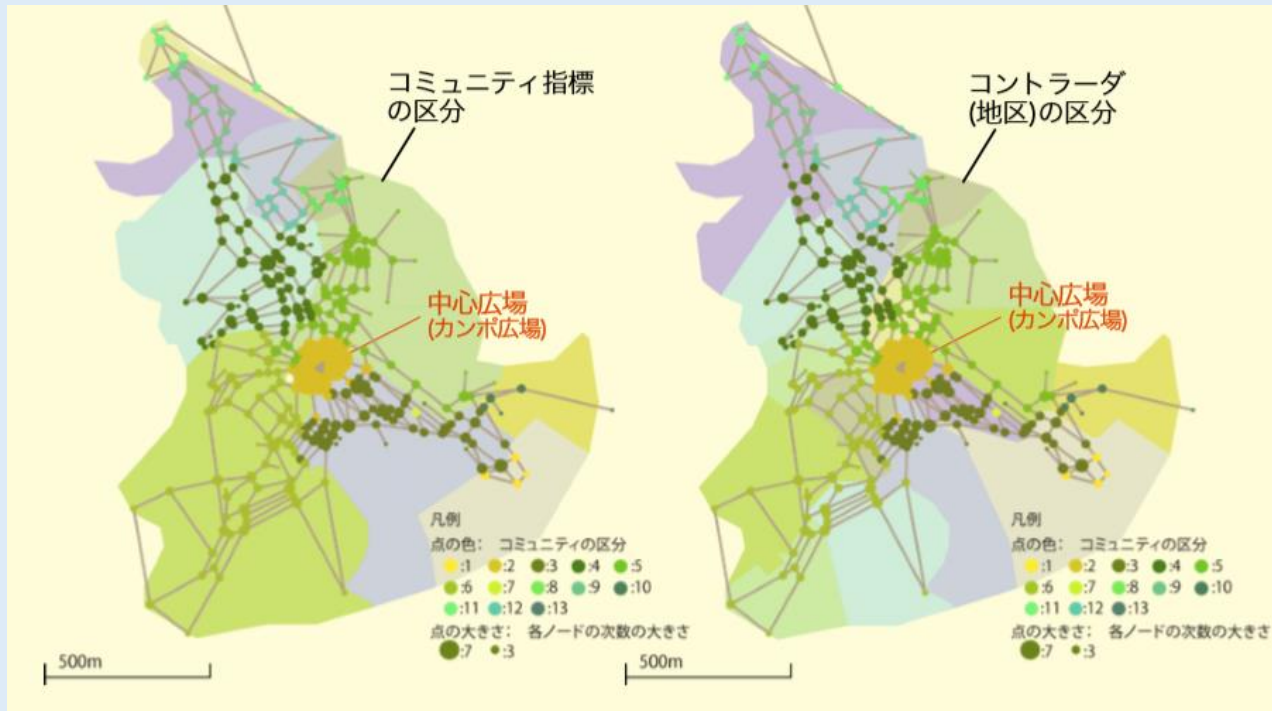
の3パターンで求めることがある

実用例

用いる指標

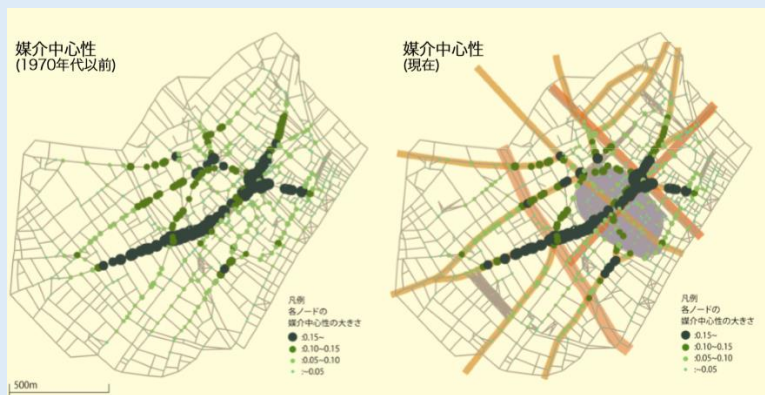
- 拠点型行動特性：街路ネットワークの連結性の強い範囲を抽出
集落など，歴史的な過程で相互連結が強固になった範囲
→コミュニティ指標を反映
- フロー型行動特性：街路ネットワーク上を移動する歩行者行動の特性を考慮
 - 目的型行動：近いほうがいい（近接中心性）経路上にあるといい（媒介中心性）
 - 回遊型行動：短い経路がいい（情報中心性）最短経路がわからないのでランダム-多くのリンクをもつほど多くの人に選ばれやすい（次数中心性）

コミュニティ/次数：シエナ



- 中心広場は次数中心性が高く，周囲から独立した強いコミュニティを単独で形成
- ネットワークのコミュニティは，実際の地区（コントラーダ）と傾向的に近い形で分割

媒介中心性：バルセロナ



□都市形成の初期につくられた街路が、都市内の各所をつなぐ最短経路として都市の骨格を形成

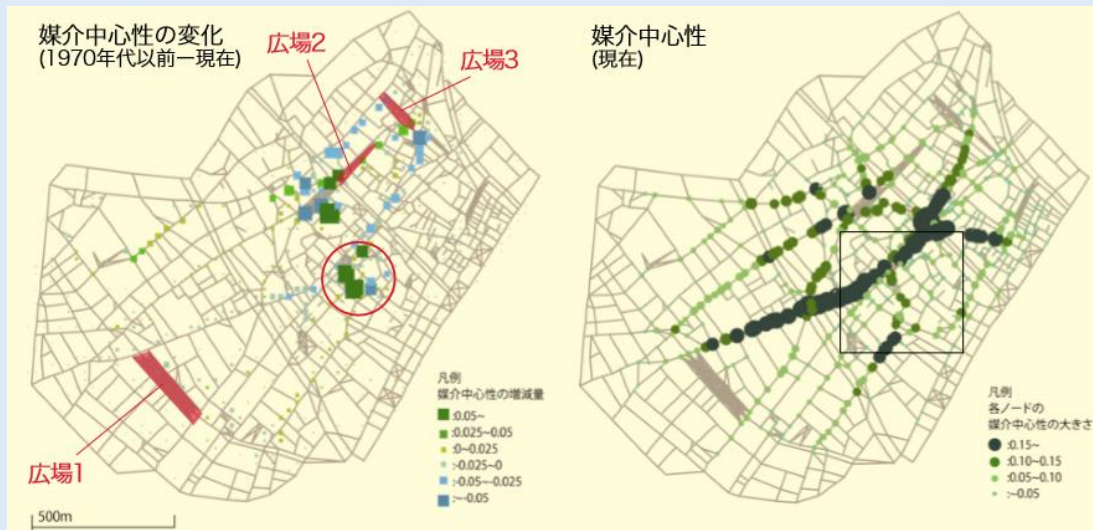
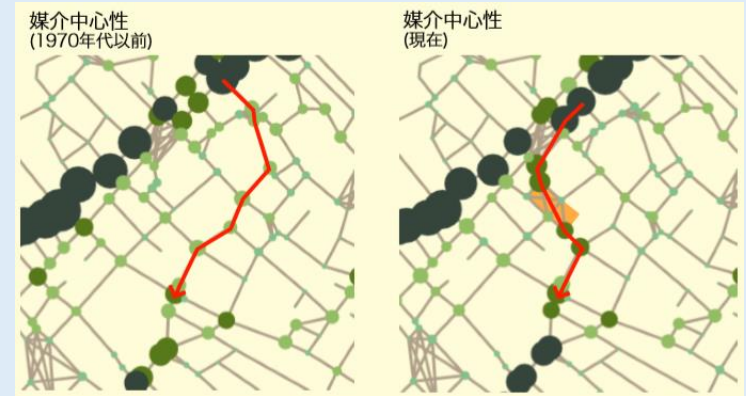
□1970年代以前と現在で、媒介中心性の高いノードの基本的な分布構成は変わっていない

□中世の都市成長初期に都心や新興居住地の核であった部分の広場（広場a,b,c,d）は、媒介中心性の高い街路上にある



媒介中心性：バルセロナ

□近年整備された大きな広場は媒介中心性の変化に影響を及ぼしていない
広場ができたことに伴って広場を貫通する経路がショートカットになり多くのノードの最短経路が移行



2015 前田さん

津波常襲地域における道路ネットワーク構造と立地プロセスに着目した都市形成過程分析

- 過去に幾度も津波被害を受けてきた地域において、過去の経験を踏まえた都市づくりが行われてきたのか？
- 都市の形態と過去の津波浸水域の関係から、津波リスクが土地形態変化に与えていた影響を明らかにする

リンク媒介中心性

- 500m 日常の平均的な徒歩圏内
- 1000m 日常の最大徒歩圏内
- 3000m 日常の自転車もしくはは車圏内で重要

塩竈市

中心市街地以外の各地に分布

→沿岸部埋め立てと開発で道路ネットワークが密に

→媒介中心性の高いリンクが沿岸部へ

1960チリ津波後浸水域のリンク減少も、その後増加

気仙沼市

徒歩・自転車の媒介中心性の高いリンクは中心市街地、

車の媒介中心性が高いリンクは中心市街地外へ伸びるネットワーク上

→沿岸部埋め立てと道路ネットワーク整備

→媒介中心性の高いリンクが沿岸部へ

元々脆弱だったものを継承or開発で脆弱に

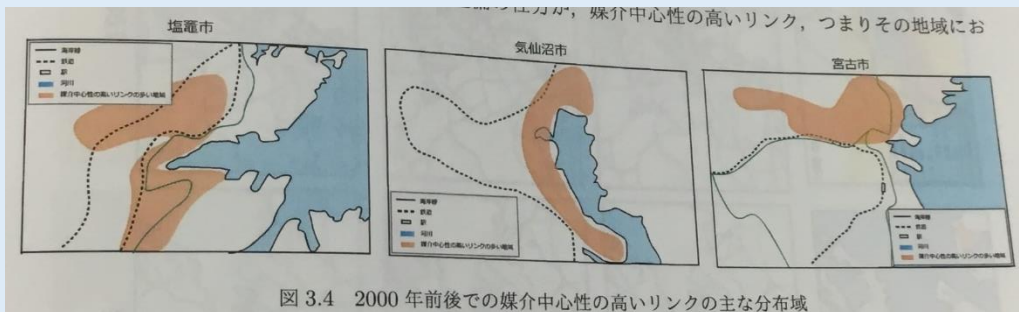
宮古市

徒歩・自転車の媒介中心性の高いリンクは中心市街地、

車の媒介中心性が高いリンクは中心市街地外へ伸びるネットワーク上

→内陸側から沿岸部にかけての鉄道

→比較的内陸側が密



気仙沼：リスク当面型

塩竈：短期的リスク回避型

宮古：長期的リスク回避型

傾向

- 媒介中心性の高いリンクの主な分布と鉄道，国道の位置に相関
- 宮古市では内陸側（浸水域の外）に媒介中心性が高いリンクが存在するのに対して、塩竈市・気仙沼市では、津波被災後も媒介中心性の高いリンクが過去の浸水域内に位置したままである
- 鉄道や国道といった社会基盤の整備位置が都市の道路ネットワークに影響を与えている

参考

- <http://bin.t.u-tokyo.ac.jp/sna08/> 社会ネットワークゼミ2008
- 金光淳: 社会ネットワーク分析の基礎～社会的関係資本論にむけて～, 勁草書房, 2003
- <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B0%E3%83%A9%E3%83%95%E7%90%86%E8%AB%96> グラフ理論-Wikipedia
- <http://www.kobepharma-u.ac.jp/knot/document/sec3.pdf> グラフの基本概念-神戸薬科大学
- <http://tgt.ynu.ac.jp/kika2text2014.pdf> 横浜国立大学 環境情報研究院 中本敦浩氏 グラフ理論 テキスト
- <http://www.ixam.net/miscs/ism-fa> ixam ISM法