

三次元空間における高速道路のルート決定の同時最適化

# **Simultaneous Optimization of Horizontal and Vertical Alignments for Highways**

E. P. Chew, C. J. Goh and T. F. Fwa

Transportation Research Part B, Vol.23B, pp.315-329, 1989

---

2018/09/08(土)

理論合宿@今治

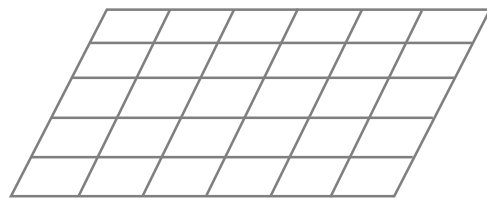
B4 出原 昇馬

# 目次

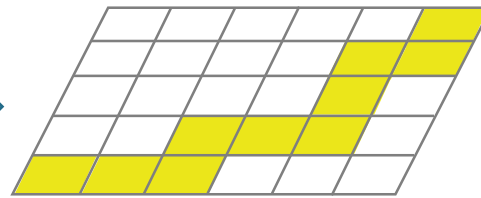
1. イントロダクション
2. コストと制約条件
3. モデルの定式化
4. 最適化手法におけるスケーリング
5. シミュレーション
6. 結論

高速道路計画においては、勾配、曲率といった地理的制約に加え、諸々の社会的制約のもとで、コストが最小化するようにルートを決めなければならない。

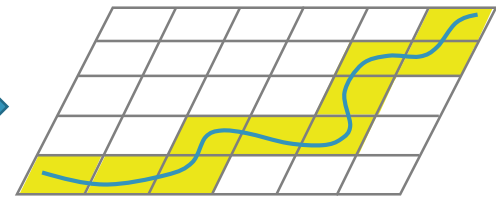
従前、ルート決定は人間の直観にゆだねられていたが、二段階法 (Parker, 1977) 等により、計算に基づいてルートを決める手法が提案された。



グリッドで分割。  
ゾーンごとに標高 (ゾーン平均)  
を割り当てる。



道路勾配の制約条件の下、  
線形回帰法を用いて土工費が最小  
となるようなゾーンを探索 (道路  
高と地盤高の差が土工費に影響)。



それぞれのゾーン内で最小  
コストとなるルートを決め  
ていく



しかしながら、こうした方法は三次元空間上のルート決定としては不十分 (水平及び垂直方向の制約条件の観点)。

本論文では、**三次元スプライン補間** (a three-dimensional cubic spline polynomial interpolation) による、高速道路の水平、垂直座標の同時最適化手法を確立。

### 高速道路建設に要するコストの定式化

		建設費に対する割合	定式化
建設費	排水	10%	体積当たりコスト（所与）
	土工	25%	地盤高・道路高・道路幅・盛土（切土）角の関数
	舗装	30%	体積当たりコスト（所与）
	土地	5-10%	道路長や土地利用により所与
	その他	30%	-
車両運用		30-1000%	制限速度，距離，速度変化箇所数等の関数
設計		5%	-
維持管理		5%	-

### 制約条件

- 垂直勾配：（ここでは）max 4%
- 曲率半径（水平・垂直）
- 建設不可能領域：湖面，軟弱地盤等

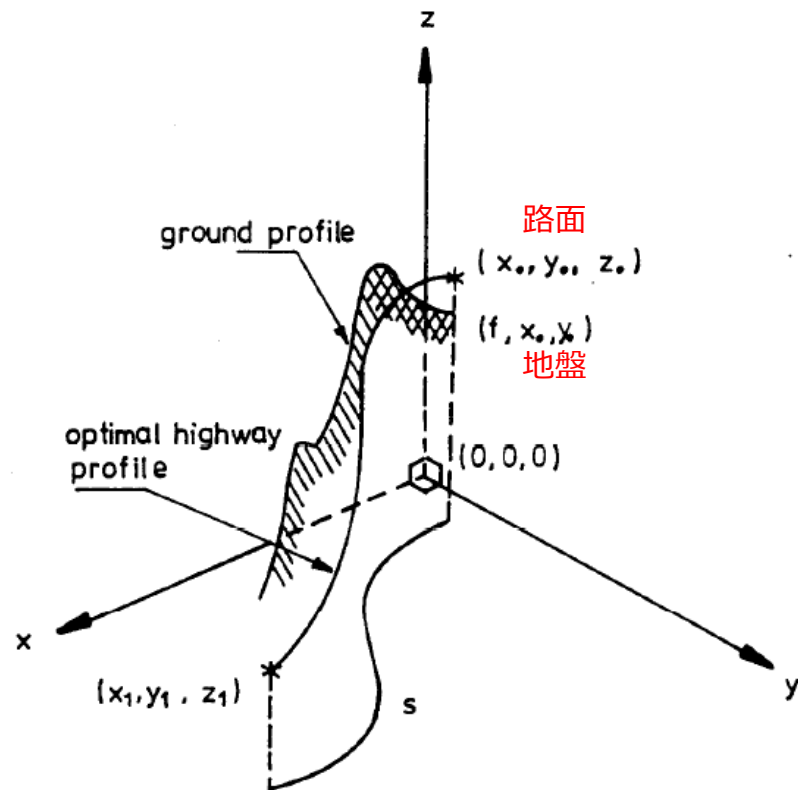


Fig. 2. Cartesian coordinate system representation of the ground and road profiles.

高速道路上の点の座標を

$$v(t) = (x(t), y(t), z(t))^T \text{ として}$$

$t \in [0,1]$ を用いて座標をパラメータ表示

最適化の目的関数は

$$\min J = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \phi_i(t, v(t), v'(t)) dt$$

subject to

総コスト最小化

$$g_k(t, v(t), v'(t), v''(t)) \leq C_k$$

制約条件

$\phi_i$  : 土工・舗装等, それぞれの単位コスト

$n$  : コストの構成要素数

$m$  : 制約条件数

境界条件 (所与) として

$$v(0) = v^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$$

$$v(1) = v^1 = (x^1, y^1, z^1)^T$$

$$\min J = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \phi_i(t, \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t)) dt$$

subject to

$$g_k(t, \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}''(t)) \leq C_k$$

単位コストはそれぞれ、以下のような関数の形で与えられる。

$$\text{土工費} : \phi_1 = \alpha_1(\delta) A(\delta) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\text{舗装費} : \phi_2 = \alpha_2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

$\delta$  : ( $= f(x, y) - z$ ) 地盤高と道路高の差

$\alpha_1(\delta)$  : 単位体積あたり土工費

$A(\delta)$  : 切土・盛土箇所断面積

$\alpha_2$  : 単位長さあたり舗装費

制約条件はそれぞれ以下のように立式される。

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

垂直勾配

$$\left| \frac{dz}{ds} \right| \leq C_1$$

垂直曲率

$$\left| \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^3}} \right| \leq C_2$$

水平曲率

$$\left| \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \right| \leq C_3$$

建設不可能領域

$$\psi(x, y) \geq C_4$$

$\forall t \in [0,1]$ で制約条件が成立するので，以下のような書き換えが可能

$$\left| \frac{dz}{ds} \right| \leq C_1$$

$$\left| \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^3}} \right| \leq C_2$$

$$\left| \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \right| \leq C_3$$

$$\psi(x, y) \geq C_4$$



$$g_1 = \eta_1 \int_0^1 \left\{ \min \left[ C_1^2 - \frac{z'(t)^2}{x'(t)^2 + y'(t)^2}, 0 \right] \right\}^2 dt = 0$$

$$g_2 = \eta_2 \int_0^1 \left\{ \min \left[ C_2^2 - \left( \frac{z''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} - \frac{z'(t)(x'(t)x''(t) - y'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2} \right)^2, 0 \right] \right\}^2 dt = 0$$

$$g_3 = \eta_3 \int_0^1 \left\{ \min \left[ C_3^2 - \frac{(x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t))^2}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}, 0 \right] \right\}^2 dt = 0$$

$$g_4 = \eta_4 \int_0^1 \left\{ \min [C_4^2 - \psi(x(t), y(t))^2, 0] \right\}^2 dt = 0$$

$\eta_i$ : 重みづけのための係数  
通常 1 に設定するが，最適解と中間解の差  
によって経験的に与えられる。

## Appendix 制約条件の書き換えの証明

## APPENDIX B

The functional inequality constraints are given by

$$f_j(t) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \forall t \in [0, 1].$$

We would like to show that

$$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{iff} \quad \int_0^1 [\min(f(t), 0)]^2 dt = 0.$$

*Proof.*

Sufficiency condition: if not, i.e.

$$\int_0^1 [\min(f(t), 0)]^2 dt = \Delta > 0 \Rightarrow \exists \chi \ni f(t) < 0 \quad \forall t \in \chi,$$

which is a contradiction.

Necessary condition: if  $\exists \Lambda \subset [0, 1] \ni f(t) < 0 \quad \forall t \in \Lambda$ , it is clear again that

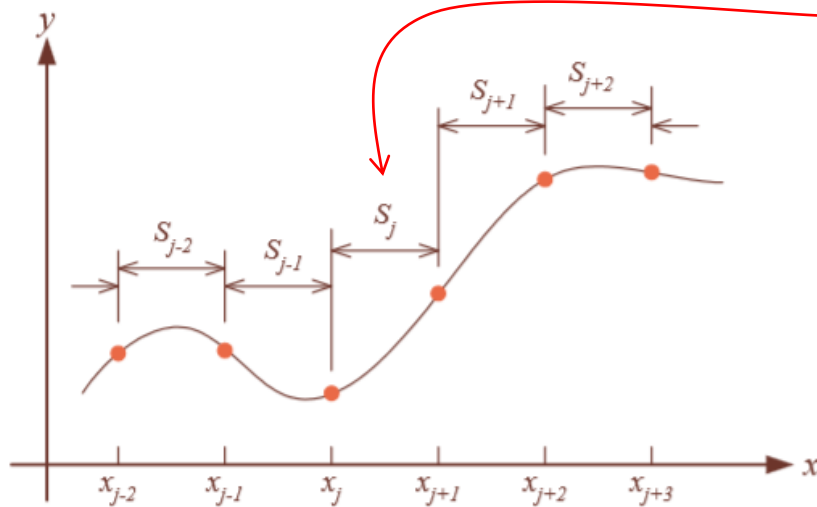
$$\int_{\Lambda} \{\min(f(t), 0)\}^2 dt > 0 \Rightarrow \int_0^1 \{\min(f(t), 0)\}^2 dt > 0,$$

which is a contradiction. Hence, the proof is complete. For further discussion, refer to Teo and Goh (1987). ■



## ※スプライン補間

補間とは離散的な点すべてを通過する関数を求め値を推測する方法。  
補間する領域をデータ間隔 $[x_i, x_{i+1}]$ に区切り, その近傍の値を使い低次の多項式で近似することを考え, 境界で導関数が連続になるように上手く近似する方法をスプライン補間という。通常3次関数が使われる。



[www.yamamo10.jp/yamamoto/lecture/2006/5E/interpolation/interpolation.pdf](http://www.yamamo10.jp/yamamoto/lecture/2006/5E/interpolation/interpolation.pdf)

$$S_j(x) = a_j(x - x_j)^3 + b_j(x - x_j)^2 + c_j(x - x_j) + d_j$$

$$(j = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1)$$

区分多項式のそれぞれの係数 $a_j, b_j, c_j, d_j$ を求めることが, スプライン補間の問題となる。  
区分多項式 $N$ 本, 係数4つ→未知数 $4N$ 個

条件

- ①すべてのデータ点を通る  
→ $2N$ 個の方程式 (各々の $S_j$ に対し両端の値が決まる)
- ②境界の一次導関数が連続  
→ $N-1$ 個の方程式
- ③境界の二次導関数が連続  
→ $N-1$ 個の方程式

$(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N)$ の $N+1$ 個のデータ

通常両端 $x_0$ と $x_N$ での二次導関数の値は0とされるため, 未知数と方程式の数が等しく, 解が導ける。

本論文ではこれを3次元に拡張させ, 適用する

高速道路の線形を3次のスプラインとして表現する.

$\sigma_j = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j})^T$  : スプライン係数

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_{j=-1}^{N+1} \sigma_j \Omega(Nt - j)$$

$$\Omega(\zeta) = \begin{cases} 0 & |\zeta| \geq 2 \\ \frac{1}{2} |\zeta|^3 - |\zeta|^2 + \frac{2}{3} & 0 \leq |\zeta| \leq 1 \\ -\frac{1}{6} |\zeta|^3 + |\zeta|^2 - 2|\zeta| + \frac{4}{3} & 1 \leq |\zeta| \leq 2 \end{cases}$$

$\sigma_j$  を決定することで高速道路の線形が多項式近似ができる

$$\min J = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \phi_i(t, \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t)) dt$$

subject to

$$g_k(t, \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}''(t)) = 0$$

未知数の数は  $(N + 3) \times 3$  個

↑  
 $x, y, z$



制約条件の下でコスト最小化を解く

## 式の解釈

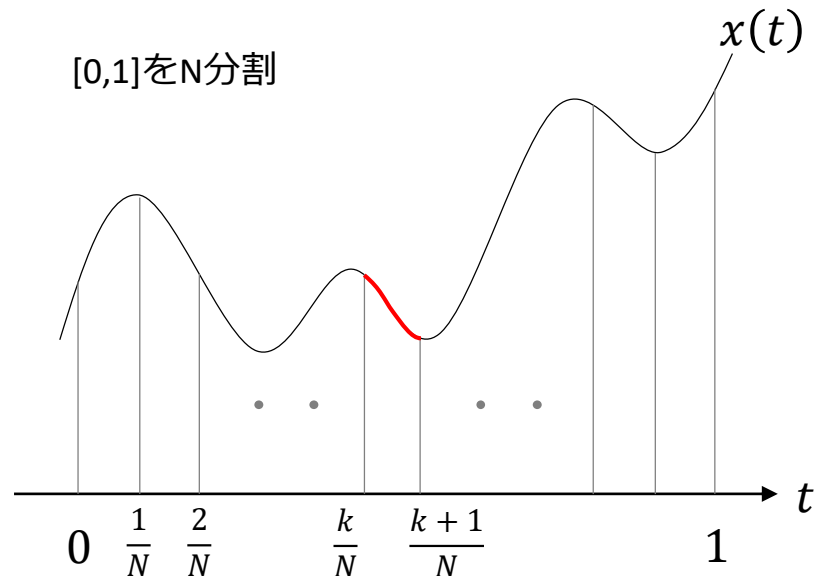
$\sigma_j = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j})^T$  : スプライン係数

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \sum_{j=-1}^{N+1} \sigma_j \Omega(Nt - j)$$

$$\Omega(\zeta) = \begin{cases} 0 & \textcircled{0} \quad |\zeta| \geq 2 \\ \frac{1}{2} |\zeta|^3 - |\zeta|^2 + \frac{2}{3} & \textcircled{1} \quad 0 \leq |\zeta| \leq 1 \\ -\frac{1}{6} |\zeta|^3 + |\zeta|^2 - 2|\zeta| + \frac{4}{3} & \textcircled{2} \quad 1 \leq |\zeta| \leq 2 \end{cases}$$

$t \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$  について考えてみる ( $t = \frac{k+0.5}{N}$  などを代入してみる)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sigma_{-1} \underbrace{\Omega(Nt + 1)}_{=0} + \sigma_0 \underbrace{\Omega(Nt)}_{=0} + \dots + \sigma_{k-2} \underbrace{\Omega(Nt - k + 2)}_{=0} \\ &+ \underbrace{\sigma_{k-1} \Omega(Nt - k + 1)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\sigma_k \Omega(Nt - k)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sigma_{k+1} \Omega(Nt - k - 1)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\sigma_{k+2} \Omega(Nt - k - 2)}_{\textcircled{2}} \\ &+ \dots + \sigma_{k+3} \underbrace{\Omega(Nt - k - 3)}_{=0} + \dots + \sigma_N \underbrace{\Omega(Nt - N)}_{=0} + \sigma_{N+1} \underbrace{\Omega(Nt - N - 1)}_{=0} \end{aligned}$$



すなわち  
一つの区間に対して0でない値を持つのは隣接する4項のみ。これは3次関数の係数の数と同じ。  
この立式ですべての区間について3次の多項式近似が表現できている！！  
(y,zについても同様)

境界条件

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{v}^1 = (x^1, y^1, z^1)^T$$

を用いると

$$\sigma_{-1} = 6\mathbf{v}^0 - 4\sigma_0 - \sigma_1$$

$$\sigma_{N+1} = 6\mathbf{v}^1 - 4\sigma_N - \sigma_{N-1}$$

となり, 未知数を $(N+1) \times 3$ 個に減らせる.

したがって探索すべき変数は $\sigma_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ).

結論として

$$\min J(\sigma)$$

subject to

$$g_k(\sigma) = 0 \quad k = 1, \dots, m$$

where

$$\sigma = (\sigma_{ij}, i = 1, 2, 3; j = 0, 1, \dots, N)$$

GRG(Generalized Reduced Gradient)や  
NLPQL(逐次二次計画法)等のアルゴ  
リズムにより $\sigma_{ij}$ が求まる.

最適化探索アルゴリズムの収束性を向上させるためには、初期化の設定が重要となる。特に変数が多い場合は適切なスケールを設定する必要がある。

初期点を  $\mathbf{r} = (\bar{\sigma}_{1j}, \bar{\sigma}_{2j}, \bar{\sigma}_{3j})^T$  とする。

行列  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_z \end{bmatrix}$  によって  $\mathbf{r}$  が

$\mathbf{v} = (\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \sigma_{3j})$  に変換されるとすれば  

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}$$

ただし  $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z$  はそれぞれ、 $x(t), y(t), z(t)$  内の変数のスケール因子の対角行列。

したがって関数  $f(\mathbf{r})$  を最小化する  $\mathbf{r}$  の探索問題は、 $h(\mathbf{v}) = f(\mathbf{T}\mathbf{v})$  と同値。準ニュートン法では  $\nabla h = \nabla f \mathbf{T}$  として

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k - \alpha_k \mathbf{D}_k \nabla h^T$$

として解を更新する。

$k$ : ステップ数

$\alpha_k$ : ステップサイズ (アルゴリズムごとに決定される)

$\mathbf{D}_k$ :  $\mathbf{v}_k$  におけるヘッシアンの逆行列

以上より  $\Delta \mathbf{r}_k = -\alpha_k \mathbf{T} \mathbf{D}_k \mathbf{T}^T \nabla f^T$

したがってスケール因子により探索方向が決定されることがわかる (スケール因子の二乗)。

例えば  $\mathbf{T}_x = 100, \mathbf{T}_y = 100, \mathbf{T}_z = 1$  と設定した場合、 $x, y$  内の変数に関しては急速に最適解に近づくが、 $z$  に関しては非常に緩やかである。そのため膨大な繰り返し計算が必要となってしまう。このようにスケールの設定が非常に重要である。設定者の直観や経験にゆだねられることが多い。プロットしながら、調整を行う。

また初期点の選び方としては切土・盛土が最小限に抑えられるように変数を選ぶ。地形図の等高線に沿うようなパスをけるように設定するとよい。

実際の土地を対象に，高速道路の3次元空間上最適設計を計算する。

- 対象：シンガポール国内の2.2×1.6km四方の土地。
- ①複雑な地形上での高速道路設計  
②建設不可能領域を含む土地での高速道路設計  
の2通りについて，始終点を与えたうえで実行（GRG）．  
一軸に対し15個のスプライン係数（12区間）
- 諸制約，コストは右表の通り

Table 1. Cost data and constraint conditions for text example

Item	Information	
Vertical gradient control	4% maximum AASHTO recommendation, 1984	
Vertical curvature	1.667 m (radius)	
Horizontal curvature	300 m (radius)	
Inaccessible region (2nd example)	Assumed a parabolic curve (Fig. 4a)	
Cutting costs	Depth of cut	Cost \$/m <sup>3</sup>
	<1.5 m	S\$10.00
	1.5–3.0 m	S\$14.40
	3.0–4.5 m	S\$18.20
	4.5–6.0 m	S\$25.00
	6.0–7.5 m	S\$30.00
	>7.5m	S\$50.00
Filling costs	S\$10.00/m <sup>3</sup>	
Pavement costs	S\$50.00/m <sup>2</sup>	

# 5. シミュレーション

## ① 複雑な地形上での高速道路設計 (総工費\$1.10)

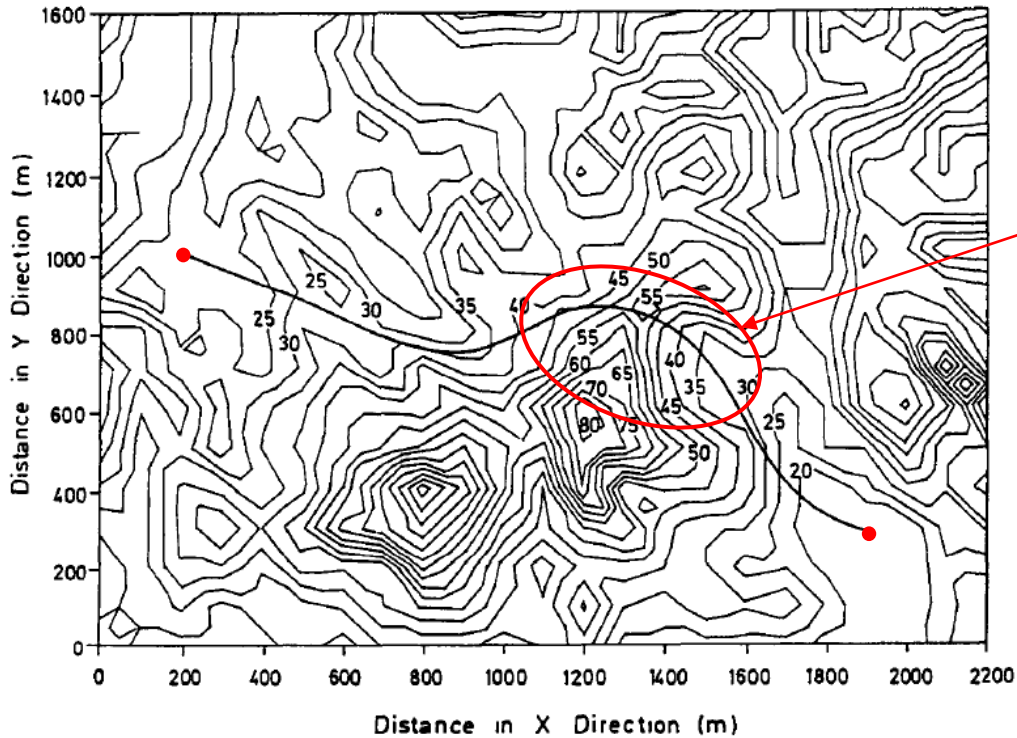


Fig. 3a. Optimal horizontal alignment for P1 by three-dimensional model.

カーブを描き,  
急傾斜地の回避  
(切土コスト削減)

### 道路・地形縦断面図

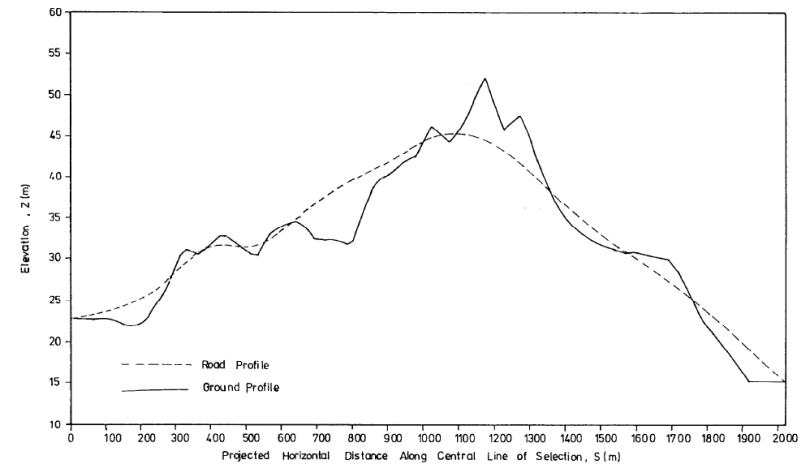


Fig. 3b. Optimal vertical alignment for P1 by three-dimensional model.

# 5. シミュレーション

## ① 建設不可能領域を含む土地での高速道路設計 (総工費\$0.62)

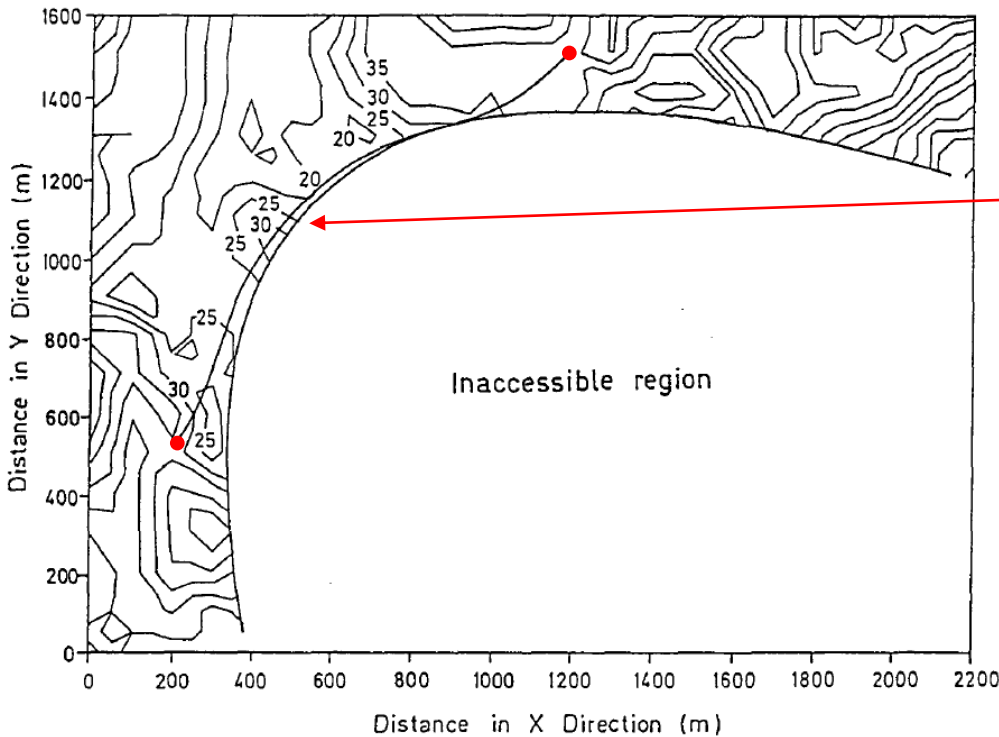


Fig. 4a. Optimal horizontal alignment for P2 by three-dimensional model.

全体的に緩勾配であり、境界に沿うように線を描く

### 道路・地形縦断面図

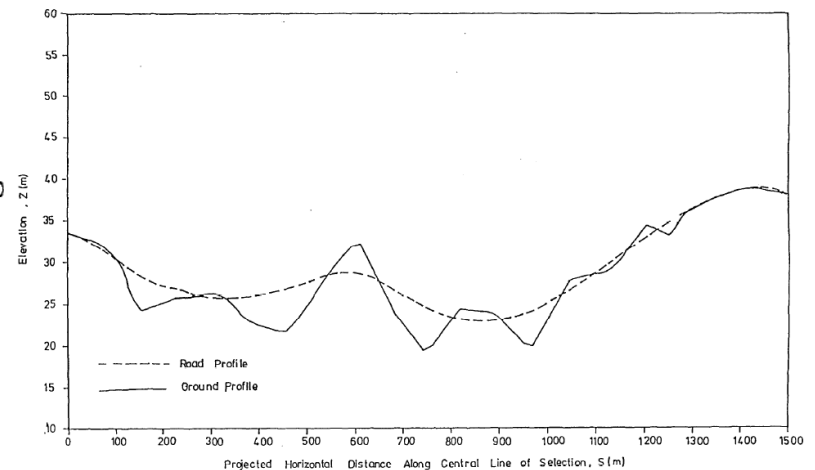


Fig. 4b. Optimal vertical alignment for P2 by three-dimensional model.



- パラメータ表示による三次元スプライン補間を用いて3次元空間上における高速道路のルート最適化手法を確立.
- 物理的, 社会的制約の下で, コストの総和を最小化をすることで, 多項式の係数を決定する.
- 本論文で述べられていない制約条件についても立式により計算に組み込むことが可能.