Fajgelbaum, Schaal (2017) :
Optimal Transport Networks in Spatial Equilibrium

夏の理論合宿　-交通配分と土地利用均衡問題-

2018/09/08

修士2年　山本正太郎

0. Contents

1. Introduction

Background

▶国際貿易や空間地理学において，**輸送コスト（Trade cost）が変わった場合に輸送パターンや都市の成長パターンはどのように変化するか，**という反事実的（Counterfactual）な問いは常に研究対象となってきた．

▶その中でも，交通ネットワークへの投資は輸送コストに大きく影響する

▷各地域に交通ネットワーク投資をどのように割り当てればよいか？
▷交通ネットワーク投資による利得の大きさは？
▷既存の交通ネットワーク投資の効率性を評価したい

▶これらの問いに答えるためには，交通ネットワーク投資の最適な組み合わせを明らかにする必要がある．

1. Introduction

Main Elements

▶新古典派経済学モデルの空間的展開（限界理論と市場均衡分析）

▶下位問題

▷財をネットワーク上でどのように輸送するか？ **”Optimal Flows”**
▷どのようにインフラを建設するか？ **”Optimal Network”**

▶**Optimal flows**問題：交通分野で多くの既往研究の蓄積

▷数値計算が容易（**tractable**）
▷双対問題の利用

▶**Full Problem (Flows + Network + GE)** の数値計算も可能にしている

▷輸送における混雑を考慮することで，最適解の大域性が保証される．

2. Relation to the Literature

▶交通ネットワークを所与として，最適輸送問題を解いている既往研究は多い.

▶交通インフラ投資に関しても，鉄道・道路ともにその歴史的な建設効果を評価したもの，反事実的に鉄道ネットワーク建設をシミュレートしたもの，交通ネットワーク建設が都市形成に与えた影響を分析したもの，など多くの既往研究がある.

ただし，労働や財の一般均衡，最適輸送問題，最適ネットワーク配置（最適交通インフラ投資）を同時に扱っている既往研究はない.

▶この論文では，新古典派経済学の枠組みの中で一般均衡を導出し，最適輸送問題と最適ネットワーク配置問題を解いている.

3. Model

3.1. Environment -Preferences

▶ *locations*: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, J\}$

▷ N個の取引財

▷1個の非取引財（供給は一定）

▷ location jにはL_j人の労働者

▷ location jで労働者1人が，$c_j = \frac{C_j}{L_j}$（取引財），h_j(非取引財）を消費.

▶ *utility function*: $U(c_j, h_j)$ **(1)**

▷ $where,\ c_j L_j = C_j^T\left(C_j^1, \ldots, C_j^N\right)$ **(2)**（C_j^Tは両方の引数に対して凹な一次同次関数）

▷ C_j^nは*location* j で消費される部門nの財の総量を表す.

3. Model

3.1. Environment -Preferences

▶ $production\ function: Y_j^n = F_j^n \left(L_j^n, V_j^n, X_j^n\right)$ (3)

▷ L_j^n: jにおいて財nの生産に携わる労働者の数

▷ $\boldsymbol{V}_j^n = \left(V_j^1, \dots, V_j^M\right)$: 生産要素（供給は一定）

▷ $\boldsymbol{X}_j^n = \left\{X_j^{1n}, \dots, X_j^{Nn}\right\}$: 部門1-Nで生産された財のうち，財nの生産に再投入されるもの

▷ F_j^n: 規模に対して収穫一定，すべての引数に対して凹な増加関数

3. Model

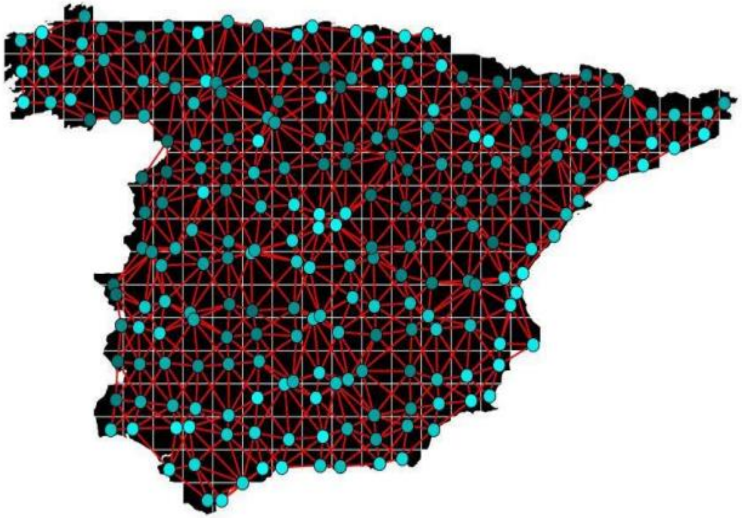
3.1. Environment –Underlying Graph

▶ *locations*: $\mathcal{J} = \{1\ ,\ \ldots\ ,\ J\}$は無向グラフ $\mathcal{G}\,(\mathcal{J},\,\varepsilon)$ に含まれ，εは ノード jのペア を表す.

▶各ノードjと接続されているノードを$N(j)$とすると，財はjから$k \in N(j)$に輸送される.

▶実際の世界に投影すると，jは**郡(county)のような地理的なまとまり**，**$N(j)$はjに隣接する他の郡**というふうに考えられる.

▶ただし，今回のモデルではjと$k \in N(j)$は地理的に隣接している必要はなく，空路や海路で繋がれている場合も考慮可能.



3. Model

3.1. Environment –Transport Technology

このモデルにおいて，財は消費地点か生産に再投入される地点までいくつかの地点を通って輸送される．

▶ Q^n_{jk}: jからkに輸送される財nの量と設定する．
▶このとき，輸送コストをτ^n_{jk}と設定すると，Q^n_{jk}をkに輸送するためには，jからは$(1+\tau^n_{jk})\,Q^n_{jk}$単位を発送しなければいけない．（**氷塊型輸送費用**）

▶ここで，輸送コストτ^n_{jk}はそのリンクの輸送量Q^n_{jk}とリンクのインフラレベルI^n_{jk}によって決定され，

$\tau^n_{jk} = \tau_{jk}(Q^n_{jk}, I^n_{jk})$ (4) について，

$\partial \tau_{jk} / \partial Q^n_{jk} \geqslant 0$ (5)： **Q^n_{jk}が増加すると輸送コストτ^n_{jk}は増加．** （混雑効果）

$\partial \tau_{jk} / \partial I^n_{jk} \leqslant 0$ ： **I^n_{jk}が増加すると輸送コストτ^n_{jk}は減少．** （インフラの改善効果）

3. Model

3.1. Environment –Flow Constraint

▶全てのjと財nについて，以下が成り立つ；

$$C_j^n + \sum_{n'} X_j^{nn'} + \sum_{k\in N(j)} \left(1+\tau_{jk}^n\right) Q_{jk}^n \leqslant Y_j^n + \sum_{i\in N(j)} Q_{ij}^n$$

左辺について，C_j^n：jで消費される財nの総量，$\sum_{n'} X_j^{nn'}$：再投入される財n'の総量，
$\sum_{k\in N(j)}(1+\tau_{jk}^n)Q_{jk}^n$：$j$から$k$に輸出される財$n$の総量を表す．

右辺について，Y_j^n：jで生産される財nの総量，
$\sum_{i\in N(j)} Q_{ij}^n$：$i$から$j$に輸入された財$n$の総量を表す．

$$\underbrace{C_j^n + \sum_{n'} X_j^{nn'} + \sum_{k\in N(j)} \left(1+\tau_{jk}^n\right) Q_{jk}^n}_{\text{消費＋再投入＋輸出}} \leqslant \underbrace{Y_j^n + \sum_{i\in N(j)} Q_{ij}^n}_{\text{生産＋輸入}} \quad (6)$$

▶また，P_{ij}^nをjにおけるnの価格として設定しておく．
※このとき，P_{ij}^nは式(6)の制約条件のラグランジュ乗数と等しくなる（定理4で証明）

3. Model

3.1. Environment –Network Building

▶本モデルでは，交通ネットワーク配置をインフラ投資$\{I_{jk}\}_{j\in J,k\in N(j)}$の分配(distribution)として定義する．

▶最適ネットワーク配置問題＝この分配を最適化すること

▶インフラ投資に関する制約を以下のように定義する．

$$\sum_{j}\sum_{k\in N(j)}\delta^{I}_{jk}I_{jk}=K \quad (7)$$

ここで，δ^{I}_{jk}はリンクjkにおける交通ネットワーク建設の難しさを表すパラメータ，Kは計画者の所有するインフラ資源の総量（一定）である．

▶また，リンクjkに既に$\underline{I_{jk}}$の交通ネットワークが建設されている場合，

$$0\le \underline{I_{jk}}\le I_{jk}\le \overline{I_{jk}}\le \infty$$

と設定しておく．（applicationのパートで使う）

3.2. Planner's problem

▶ω_jをPlannerが各jにいる労働者に割り当てる重みとすると，**労働者が移動しない場合**の最適化問題は,

$$W = \max_{c_j, h_j, C_j, \{I_{jk}\}_{k \in N(j)}, \left\{C_j^n, L_j^n, V_j^n, X_j^n, \left\{Q_{jk}^n\right\}_{k \in N(j)}\right\}_n} \sum_j \omega_j L_j U(c_j, h_j)$$

subject to:

(1) 取引財・非取引財の利用可能性**(availability)**：

$$c_j L_j \leq C_j^T\left(C_j^1, \ldots, C_j^N\right) \; for \; all \; j$$
$$h_j L_j \leq H_j \; for \; all \; j$$

(2) フローのバランス条件：

$$C_j^n + \sum_{n'} X_j^{nn'} + \sum_{k \in N(j)} \left(1 + \tau_{jk}^n\right) Q_{jk}^n \leqslant Y_j^n + \sum_{i \in N(j)} Q_{ij}^n$$

3. Model

3.2. Planner's problem

（制約条件続き）

(3) ネットワーク建設制約：

$$\sum_{j}\sum_{k\in N(j)}\delta^{I}_{jk}I_{jk}\leq K$$

(4) 地点jの労働力と生産要素について,

$$\sum_{n}L^{n}_{j}\leq L_{j}\ for\ all\ j$$

$$\sum_{n}V^{mn}_{j}\leq V^{m}_{j}\ for\ all\ j\ and\ m$$

(5) 消費，輸送量，各要因の非負条件：

$$C^{n}_{j},c_{j},h_{j}\geq 0\ for\ all\ j\in N(j),n$$

$$Q^{n}_{jk}\geq 0\ for\ all\ j,k\in N(j),n$$

$$L^{n}_{j},V^{mn}_{j}\geq 0\ for\ all\ j,m,n$$

3. Model

3.2. Planner's problem

▶ω_jをPlannerが各jにいる労働者に割り当てる重みとすると，**労働者が移動する場合**の最適化問題は,

$$W = \max_{c_j,\, h_j,\, C_j,\, \{I_{jk}\}_{k\in N(j)},\, L_j,\, \left\{C_j^n,\, L_j^n,\, v_j^n,\, x_j^n,\, \left\{Q_{jk}^n\right\}_{k\in N(j)}\right\}_n} u$$

$subject\ to$:

労働者が移動しない場合の制約条件(1)～(5)と,

(6) 移動する労働者について，（→居住のあるjでの効用がすべて等しい）

$$L_j u \le L_j U(c_j, h_j)\ for\ all\ j$$

(7) 労働者の総数をLとすると,

$$\sum_j L_j = L$$

3. Model

3.2. Planner's problem

▶労働者が移動しない場合の最適化問題は以下のように分割できる.

$$W = \max_{I_{jk}} \max_{Q_{jk}^n} \max_{\{C_j^n, L_j^n, \boldsymbol{V}_j^n, \boldsymbol{X}_j^n\}} \sum_j \omega_j L_j U(c_j, h_j)$$

▶**Optimal Allocation Problem**

最も内側にある$C_j^n, L_j^n, \boldsymbol{V}_j^n, \boldsymbol{X}_j^n$に関する最大化問題は，生産可能性フロンティア(Production possibility frontier)に従って生産要素と労働の投入を最適化し，各jにおける財の利用可能性に従って消費を選択する問題であり，新古典派経済学の中で十分に研究されてきた問題である.

3. Model

3.2. Planner's problem

▶Optimal Flows Problem

最適な輸送量を決めるQ_{jk}^nに関する最大化問題について，輸送量は以下のように2地点の価格比によって制約されることを利用する．

$$\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq 1 + \tau_{jk}^n + \frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n, = if\ Q_{jk}^n > 0 \qquad (8)$$

→2地点間の価格の比は，限界輸送費用以下である．

$Q_{jk}^n \tau_{jk}^n$がQ_{jk}^nに関して凸であれば，輸送量は2地点間の価格比の関数で表される．

→ Optimal Flows Problemは，各地点の生産，消費，労働者人口が与えられていれば，2地点間の価格比のみによって解くことができる（双対問題）

3. Model

3.2. Planner's problem

▶**Optimal Flows Problem**

すなわち，2地点の価格比$\frac{P_k^n}{P_j^n}$が大きいほど，輸送量Q_{jk}^nは大きくなる．

右図は，生産と消費が与えられたときの最適輸送を示している．

青丸で１つの財が生産され，オレンジの丸（10ヶ所）で需要されているとすると，価格は青丸で最も低く，青丸から遠い場所で高くなる．

そのような場合に最適輸送問題を解くと右のようになる（線の太さが輸送量を表す）．

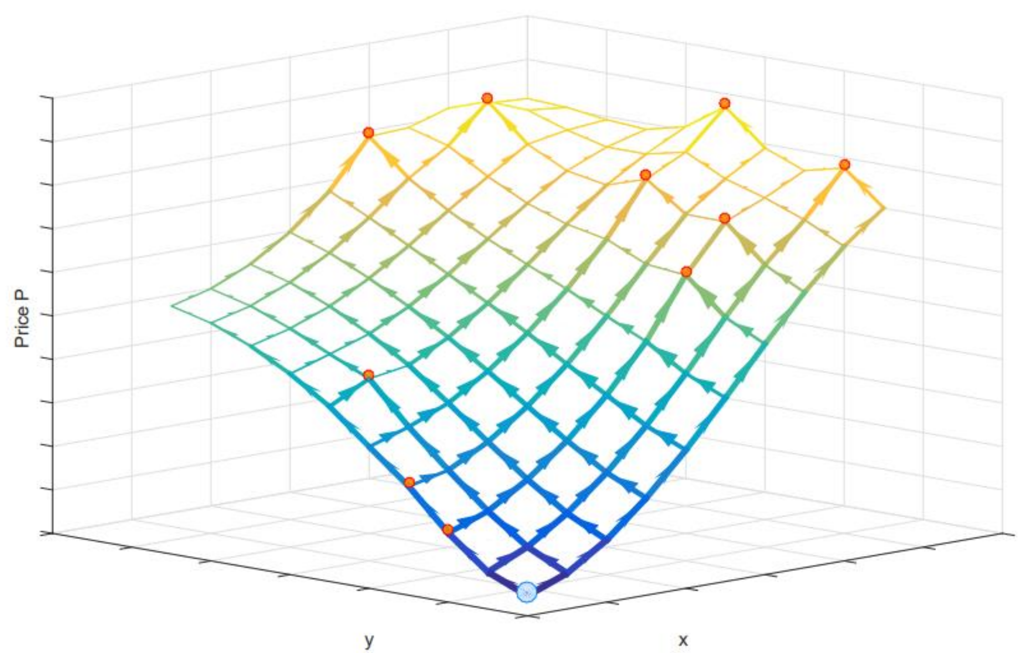


Figure 1: Example of Optimal Flows as a Function of the Price Field

3. Model

3.2. Planner's problem

▶Optimal Network Problem

最適な輸送量と資源の配置が決まったところで，最適ネットワーク配置を考える．
制約条件(3)ネットワーク建設制約の未定乗数をμとすると，

$$\underbrace{\mu\delta^i_{jk}}_{\text{限界建設費用}} \geqslant \underbrace{\textstyle\sum_n P^n_j\, Q^n_{jk}\left(-\partial\tau^n_{jk} / \partial I^n_{jk}\right)}_{\text{インフラ建設による限界収益}} \tag{9}$$

※ $\underline{I_{jk}} \leq I_{jk}$ならば，不等号は等号に変わる．

ここでも，Q^n_{jk}が2地点間の価格比によってのみ決まることから，最適化の際に全体のネットワークを考える必要がなく，リンクごとに最適ネットワーク投資問題を解くことができる．

3. Model

3.3. Properties

▶定理１． Planner's problem の凸性について

(1-1)ネットワーク$\{I_{jk}\}$が所与の時，$\mathrm{Q}\tau^{n}_{jk}(Q, I_{jk})$が全ての$j, k$に関して，$Q$について凸であれば，労働者が移動しないケースの**optimal transport problem**と**allocation problem**は凸最適化問題である．

(1-2)さらに，$\mathrm{Q}\tau^{n}_{jk}(Q, I_{jk})$が全ての$j, k$に関して，$Q, I$両方について凸であれば，ネットワーク配置問題を含む全ての最適化問題が凸最適化問題となる．

(1-1)は，既往研究では試みられなかった最適輸送問題を新古典派経済学の枠組みの中で解くという新たな試みの計算性を保証している．

3. Model

3.3. Properties -Example

▶Log-linear Parametrization of Transport Costs

輸送コストτ_{jk}について，以下のようにパラメータを設定する．

$$\tau_{jk}(Q,I)=\delta_{jk}^{T}\frac{Q^{\beta}}{I^{\gamma}}\quad \beta\geq 0,\gamma\geq 0 \qquad (10)$$

▷$\beta\geq 0$は輸送に伴う混雑の存在を示し， $\gamma\geq 0$はネットワークへの投資が輸送コストを減少させることを示す．
▷パラメータδ_{jk}^{T}は輸送量やネットワーク状況とは独立な地理的障害を表す．

このとき，$\boldsymbol{\beta\geq\gamma}$であれば，定理(1-2)が成立し，全ての最適化問題が凸最適化となる．

※$\beta\geq\gamma$は，ネットワークへの投資効果が徐々に逓減する状況を示す．

3. Model

3.3. Properties -Example

▶Log-linear Parametrization of Transport Costs

また，$\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq 1 + \tau_{jk}^n + \frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n, = if\ Q_{jk}^n > 0$と組み合わせることにより，

$$Q_{jk}^n = \left[\frac{1}{1+\beta} \frac{I_{jk}^{\gamma}}{\delta_{jk}^I} \max \left\{ \frac{P_k^n}{P_j^n} - 1, 0 \right\} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (11)$$

を得る．
また，最適な交通インフラ投資I_{jk}^*も，以下のようになる．

$$I_{jk}^* = \left[\frac{\gamma}{\mu} \frac{\delta_{jk}^T}{\delta_{jk}^I} \left(\sum_n P_j^n \left(Q_{jk}^n \right)^{1+\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1+\gamma}} \quad (12)$$

この式は，I_{jk}^*はP_j^n（originにおける財nの値段），輸送量Q_{jk}^n，地理的障害δ_{jk}^Tとともに増加し，インフラ建設困難性δ_{jk}^Iとともに減少することを示す．

3. Model

3.3. Properties -Example

▶Log-linear Parametrization of Transport Costs

したがって，現実世界における計画者の問題は，既存のインフラ$\underline{I_{jk}}$に対し，追加で投資するかを選択することであるので，

$$I_{jk} = \max\{I_{jk}^*, \underline{I_{jk}}\} \qquad (13)$$

また，(11)と(9)を組み合わせることにより，各リンクの最適な交通インフラ投資I_{jk}^*は，以下のように均衡価格のみの式で表すことができる．

$$I_{jk}^* = \left[\frac{\kappa}{\mu\delta_{jk}^I\left(\delta_{jk}^T\right)^{\frac{1}{\beta}}}\left(\sum_{n:P_k^n>P_j^n} P_j^n\left(\frac{P_k^n}{P_j^n}-1\right)\right)^{\frac{1+\beta}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \qquad (14)$$

$$where, \kappa \equiv \gamma(1+\beta)^{-\frac{1+\beta}{\beta}}$$

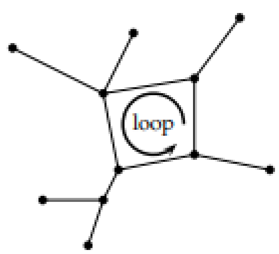
3. Model

3.3. Properties -Example

▶**Non-Convexity: the Case of Returns to Transport**

式(10)について， $\beta < \gamma$とすると，Planner's Problemは凸性を失う(Non-Convexity).
このとき，インフラ投資効果が輸送量増大による混雑効果を上回るので，計画者は輸送をいくつかのリンクに集中させようとする.

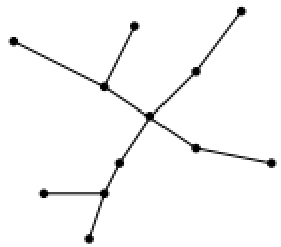
(a) Non-tree



▶**Tree Network**

定理3.
$I_{jk} = 0$の（既存のネットワークが存在しない）ときに，式(10)の輸送コストのパラメータが$\beta < \gamma$で与えられ，唯一の財が一箇所で生産されるような経済では，最適な輸送ネットワークの形状はTree状になる.

(b) Tree



Tree状ネットワーク：ループを含まないネットワークのこと.
（ループは資源Kの無駄になる）

3.4. Allocation Given the Network

▶Decentralized competitive equilibrium

ネットワーク$\{I_{jk}\}$がgivenのときのoptimal allocation problem($\max_{c_j^n, L_j^n, \boldsymbol{V}_j^n, \boldsymbol{X}_j^n}$) と optimal transportation problem($\max_{Q_j^n}$) を考える.

このとき，分散型経済(Decentralized economy)は新古典派経済学における競争均衡(competitive equilibrium)と完全に一致する.

▶trader の導入

財をoから$d\ for\ all\ (o,d) \in \mathfrak{I}^2$に輸送するtraderを想定する.
Traderは価格受容者(price-taker)であり，どのtraderもq_{jk}^n単位の財を輸送する際に$q_{jk}^n \tau_{jk}^n$の輸送コストを受容する.

※ただし，先述の通りτ_{jk}^nは外生変数でなく，各リンクの輸送量によって内生的に決定される.

3.4. Allocation Given the Network

▶Pigouvian taxes

Pigouvian taxes（ピグー税，外部不経済を是正するための税）t_{jk}^{n}を導入する．

▶Traderの利益最大化問題

財nをoからdに輸送するTraderは，輸送ルート$r=(j_0,\dots j_\rho)\in\mathcal{R}_{od}$を最適化することによって，利益を最大化する．Traderの利益を π_{od}^{n} とすると，利益最大化問題は，

$$\pi_{od}^{n}=\max_{r=\{j_0,\dots,j_\rho\}\in\mathcal{R}_{od}} p_d^n-p_o^nT_{r,0}^n-\sum_{k=0}^{\rho-1}p_{j_{k+1}}\,t_{j_kj_{k+1}}^{n}T_{r,k+1}^{n}\quad(15)$$

ここで， $T_{r,k}^{n}$は経路rを通った時の地点kからの氷塊輸送コストの合計である．
各項を順番に説明すると， p_d^nはdにおける財n 1 単位の売り渡し価格， $p_o^nT_{r,0}^n$はoにおける財n $T_{r,0}^n$単位の買い付け価格，$\sum$以降はj_kからj_{k+1}に輸送する際に払わなければならないピグー税を表す．

3. Model

3.4. Allocation Given the Network

▶Returns to factors

労働者が移動しないケースにおいて，各地点jにいる労働者は賃金に加えてtransfer（移転支出，計画者による富の再分配）t_jを受け取る．ここで，$\sum_{j=1}^{J} t_j L_j = \Pi$である．（$\Pi$は労働以外のリソースから計画者が得る収入の合計）

→この設定により，労働者は全ての税収を再分配されるため，貿易の不均衡が許容される（価格の不均衡が許容される？）

▶厚生経済学の基本定理

第一基本定理：競争均衡によって達成される配分はパレート効率的である．

第二基本定理：任意のパレート効率的配分は，適当な所得分配を行うことによって競争均衡配分として実現可能である．

3. Model

3.4. Allocation Given the Network

▶厚生経済学の基本定理（続き）

定理**4.**
財nに課税されるピグー税が以下の等式を満たすとき，以下が成り立つ：

$$1 - t_{jk}^{n} = \frac{1 + \tau_{jk}^{n}}{1 + \left(\frac{\partial \log \tau_{jk}^{n}}{\partial \log Q_{jk}^{n}} + 1 \right) \tau_{jk}^{n}}$$

(1) 労働者が移動しないケースにおいて，競争均衡は適当な重み付け ω_j のもとで，計画者の最適化問題と一致する．また逆に，計画者による**allocation**は，特定の移転支出t_jのもとでの市場均衡によって達成される．

(2) 労働者が移動するケースでは，全ての労働者が平等な固定要素と移転支出を得るという条件においてのみ，競争均衡が計画者の最適化問題と一致する．

3. Model

3.4. Allocation Given the Network

▶厚生経済学の基本定理（続き）

定理4.
財nに課税されるピグー税が以下の等式を満たすとき，以下が成り立つ：

$$1 - t_{jk}^{n} = \frac{1 + \tau_{jk}^{n}}{1 + \left(\frac{\partial \log \tau_{jk}^{n}}{\partial \log Q_{jk}^{n}} + 1 \right) \tau_{jk}^{n}}$$

(1) 労働者が移動しないケースにおいて，競争均衡は適当な重み付け ω_j のもとで，計画者の最適化問題と一致する．また逆に，計画者による**allocation**は，特定の移転支出t_jのもとでの市場均衡によって達成される．

定理4.の(1)はapplicationの際に有用である．現在の市場の状態が競争均衡であると想定することで，ネットワークが所与の状態におけるモデルのcalibrationが可能となる．

3. Model

3.5. Numerical Implementation

▶Convex Cases

定理**(1-2)**の想定のもと（$Q\tau^n_{jk}(Q, I_{jk})$が全てのj, kに関して，Q, I両方について凸）では，**計画者の最適化問題は凸最適化問題であり，KKT条件が必要十分条件となる.**

▶Dual approaches

(1) $\mathcal{L}$を計画者の最適化問題のラグランジュ関数とし，
諸変数を$\boldsymbol{x} = (C^n_j, L^n_j, \mathbf{V}^n_j, Q^n_{jk}, \dots)$，各制約条件に対するラグランジュ乗数$\boldsymbol{\lambda} = (P^n_j, \dots)$を置くと，最適化問題は以下の停留点探索問題に要約される.

$$\sup_{x} \inf_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

(2)一方，最適化の順序は交換可能であり，

$$\inf_{\lambda \geq 0} \sup_{x} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

が双対問題となる.

3. Model

3.5. Numerical Implementation

▶Dual approaches(Cont'd)

$$\inf_{\lambda \geq 0} \sup_{x} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

労働者が移動しないケースにおいて，定理１より，$\mathrm{Q}\tau_{jk}^{n}(Q, I_{jk})$が全ての$j, k$に関して，$Q$について凸であれば，計画者の最適化問題が凸最適化問題となるため，強双対性は保証される（主問題と双対問題の最適解が一致する）

また，これまでの議論より，最適輸送問題と最適ネットワーク投資問題は以下のように解けるので，$\inf_{\lambda \geq 0} \sup_{x} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$は$\inf_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})$に帰着し，この最小化問題は非負制約のみの凸最適化問題となり，容易に計算できる．

$$\frac{P_k^n}{P_j^n} \leq 1 + \tau_{jk}^n + \frac{\partial \tau_{jk}^n}{\partial Q_{jk}^n} Q_{jk}^n, = if\ Q_{jk}^n > 0$$

$$I_{jk}^{*} = \left[\frac{\gamma}{\mu} \frac{\delta_{jk}^{T}}{\delta_{jk}^{I}} \left(\sum_{n} P_j^n \left(Q_{jk}^n \right)^{1+\beta} \right) \right]^{\frac{1}{1+\gamma}}$$

3.5. Numerical Implementation

▶Non-Convex Cases

定理１の条件が満たされない時，計画者の最適化問題は凸性を失い，上記のやり方では大域的最適解を得ることが出来ない．

しかしながら，式**(10)の輸送コストに関して少なくとも$\boldsymbol{\beta \geq 0}$であれば，optimal transport problemとallocation problemは凸最適化問題である**という性質を用いれば，この２つの問題に関しては大域的最適解を得ることができるので，
ネットワーク投資I_{jk}について適当な初期値を与えた上で，$C_j^n, L_j^n, \mathbf{V}_j^n, Q_{jk}^n$について最適化問題を解き，式(9)を用いて$I_{jk}$を計算し直すという計算を収束するまで繰り返す．

さらに**焼きなまし法(annealing method)**と組み合わせることにより，より良い解を探索するという方法が適用可能である．

4. Illustrative Examples

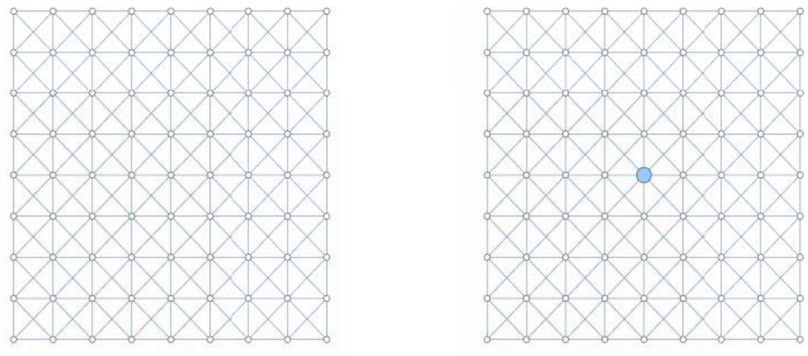
4.1. One good on a Regular Geometry

▶Preparation

(1) 効用関数はCRRA型：$U = (c^{\alpha}h^{1-\alpha})^{1-\rho}/(1-\rho)\ with\ \alpha = \frac{1}{2}\ and\ \rho = 2$
(2) 財と生産要素は一つ（労働のみ）
(3) 労働やすべての技術は線形
(4) 混雑とインフラ投資のバランスに関しては式(10)を採用

▶Kの値／都市の配置によるネットワーク形状の比較

設定：$\beta = \gamma = 1\ in\ convex\ case,\ \gamma = 2\ in\ non-convex\ case,$ 労働者 は固定，地理的障害なし，各ノードで$(L_j, H_j) = (1{,}1)$，中央の点のみ生産性パラメータが10倍

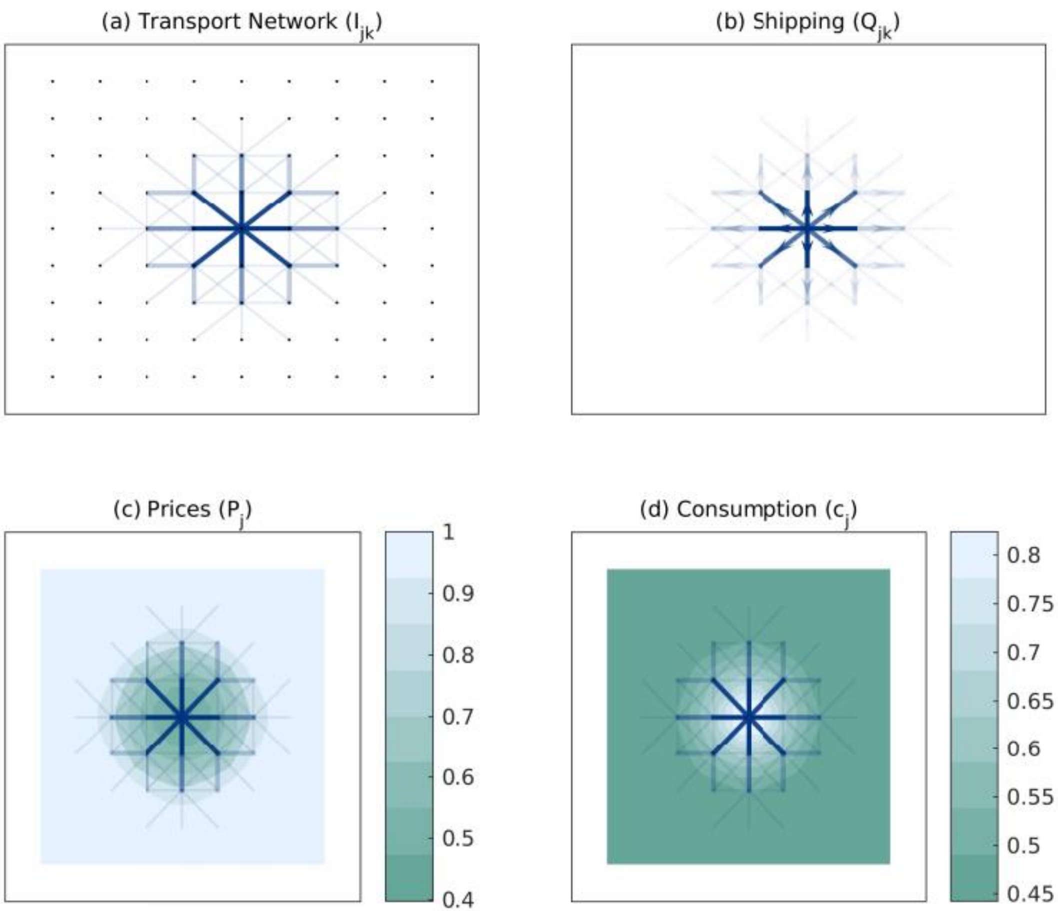


(a) Population　(b) Productivity

4. Illustrative Examples

4.1. One good on a Regular Geometry

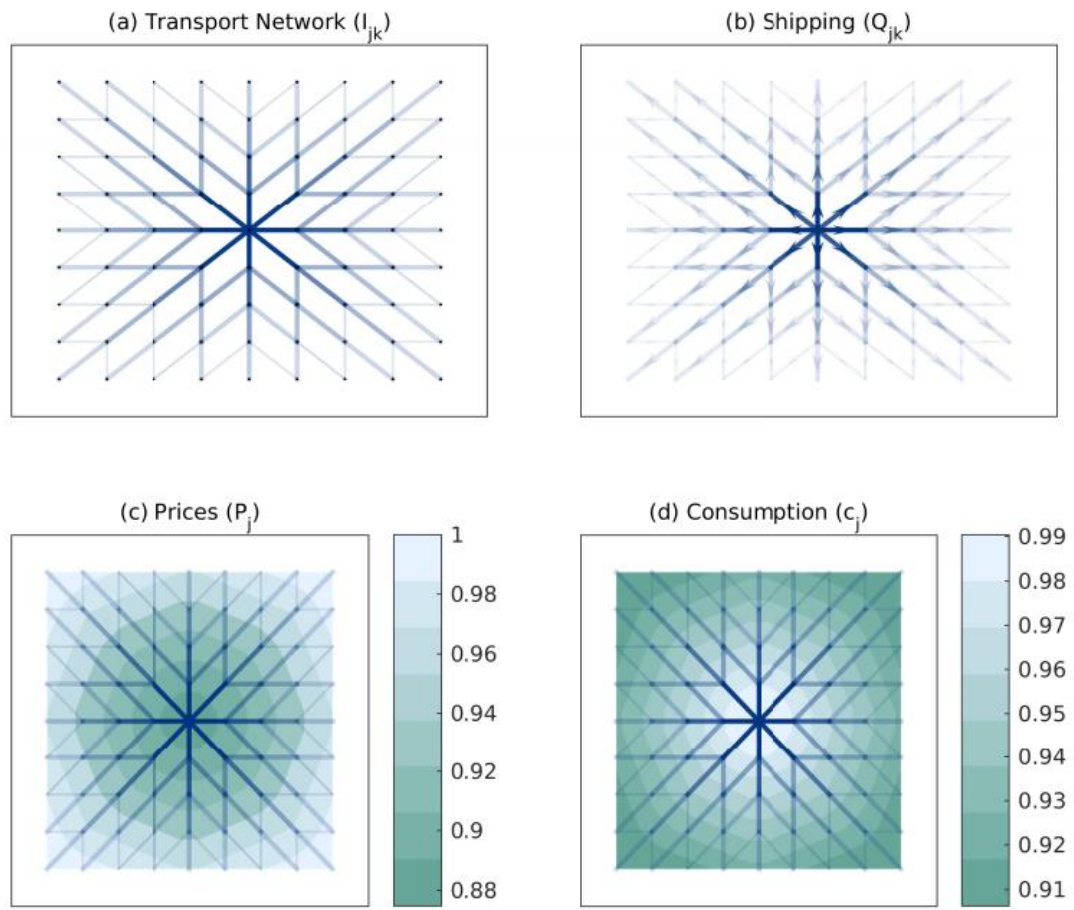
▶Optimal Network, K=1 (Symmetric Network)



4. Illustrative Examples

4.1. One good on a Regular Geometry

▶Optimal Network, K=100 (Symmetric Network)



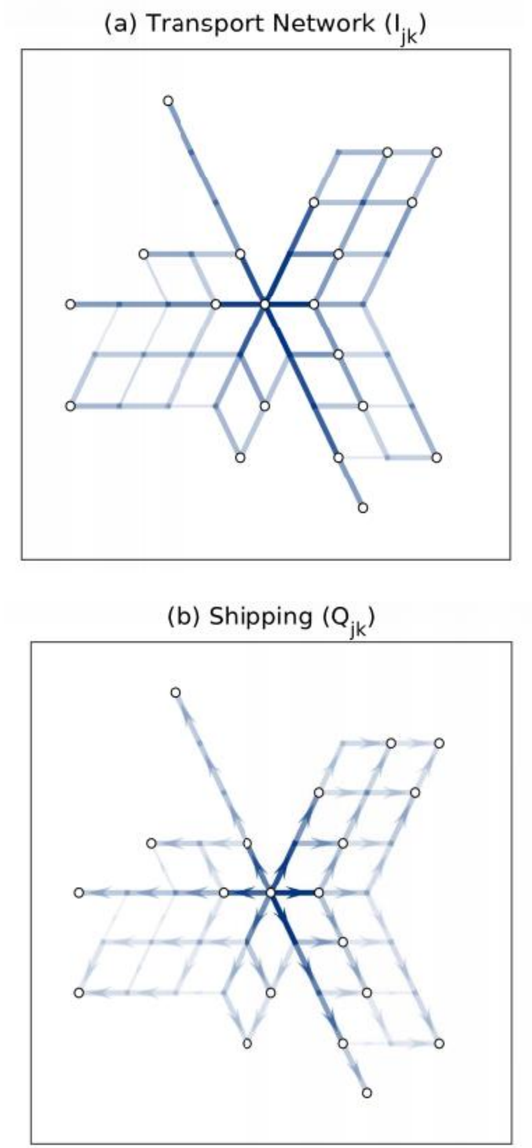
4.1. One good on a Regular Geometry

▶Optimal Network

(Randomly Located Cities, Convex Case)

都市を20ヶ所ランダムに配置.

$$L_j = 1 \; if \; j \; is \; a \; city$$
$$L_j = 0 \; otherwise$$



4. Illustrative Examples

4.1. One good on a Regular Geometry

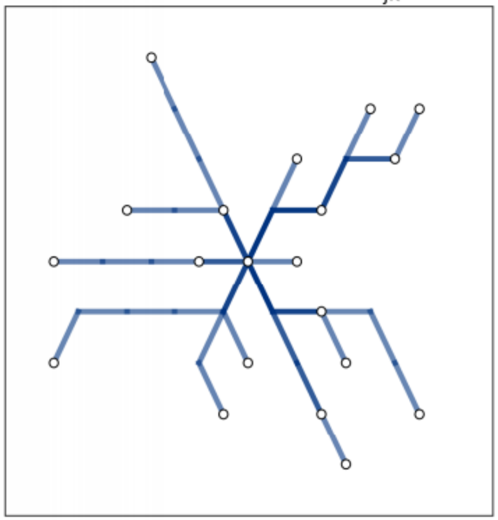
▶Optimal Network

(Randomly Located Cities, Non-Convex Case)

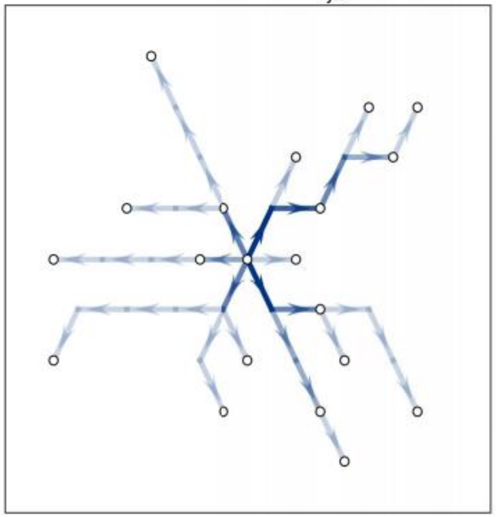
都市を20ヶ所ランダムに配置.

$$L_j = 1 \; if \; j \; is \; a \; city$$
$$L_j = 0 \; otherwise$$

(c) Transport Network (I_{jk})



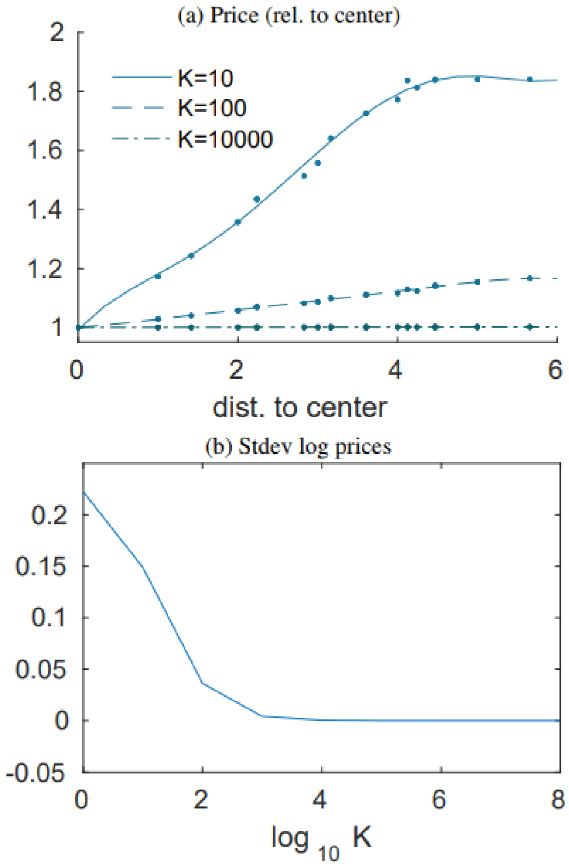
(d) Shipping (Q_{jk})

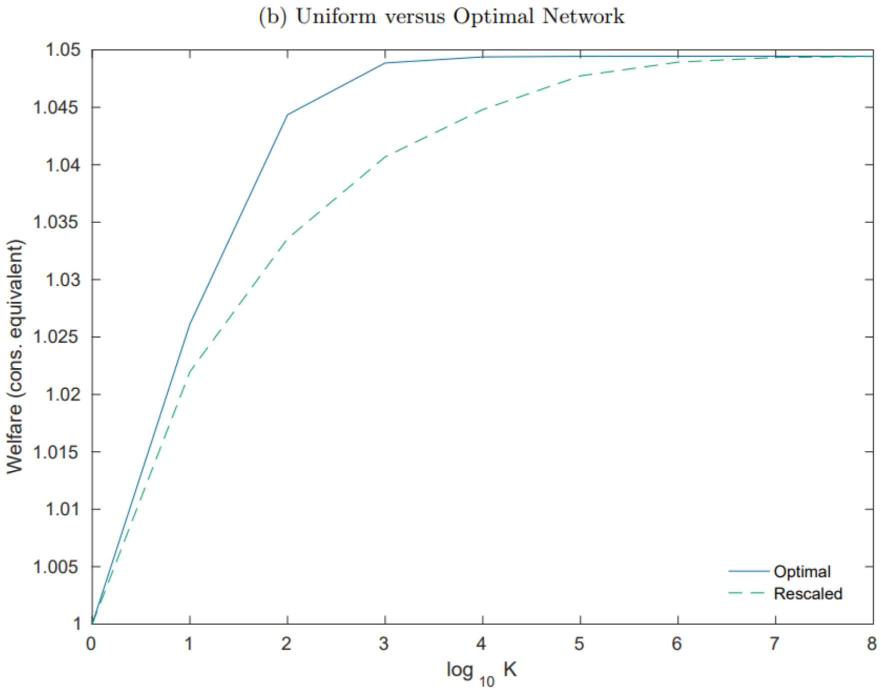


4. Illustrative Examples

4.1. One good on a Regular Geometry

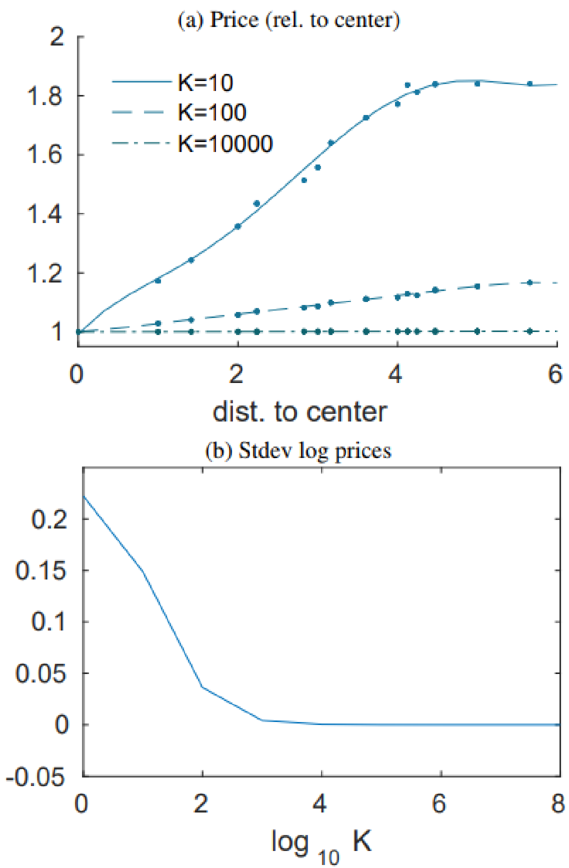
▶Effect of optimal network

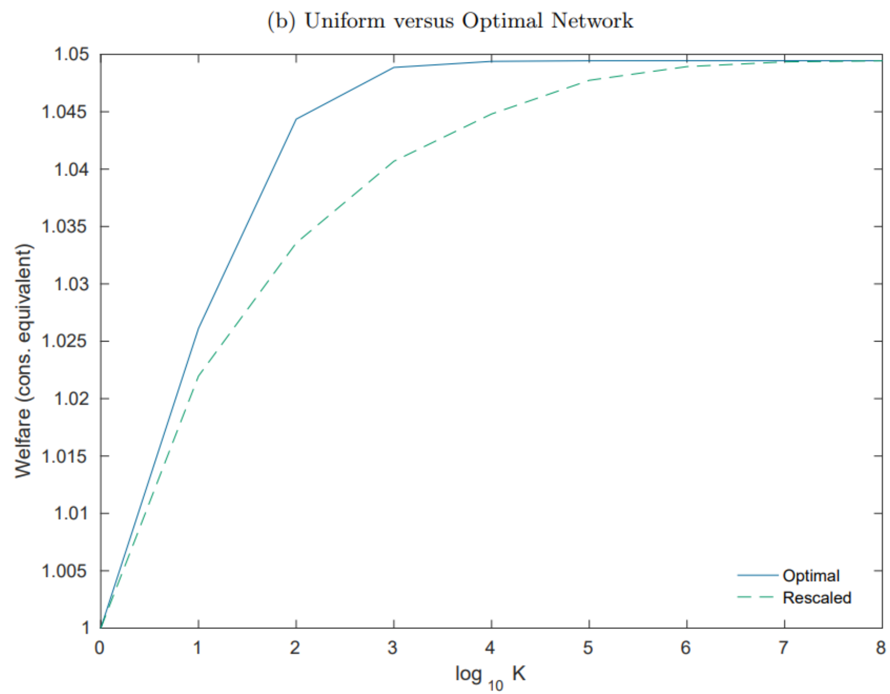




4.1. One good on a Regular Geometry

▶ Effect of optimal network





4.2. Many sectors and Labor Mobility

▶Preparation

(1) 効用関数はCRRA型：$U = (c^{\alpha} h^{1-\alpha})^{1-\rho}/(1-\rho)\ with\ \alpha = \frac{1}{2}\ and\ \rho = 2$
(2) 財は11個（“工業製品”10個，“農産品”1個）生産要素は一つ（労働のみ）
(3) 労働やすべての技術は線形
(4) 混雑とインフラ投資のバランスに関しては式(10)を採用

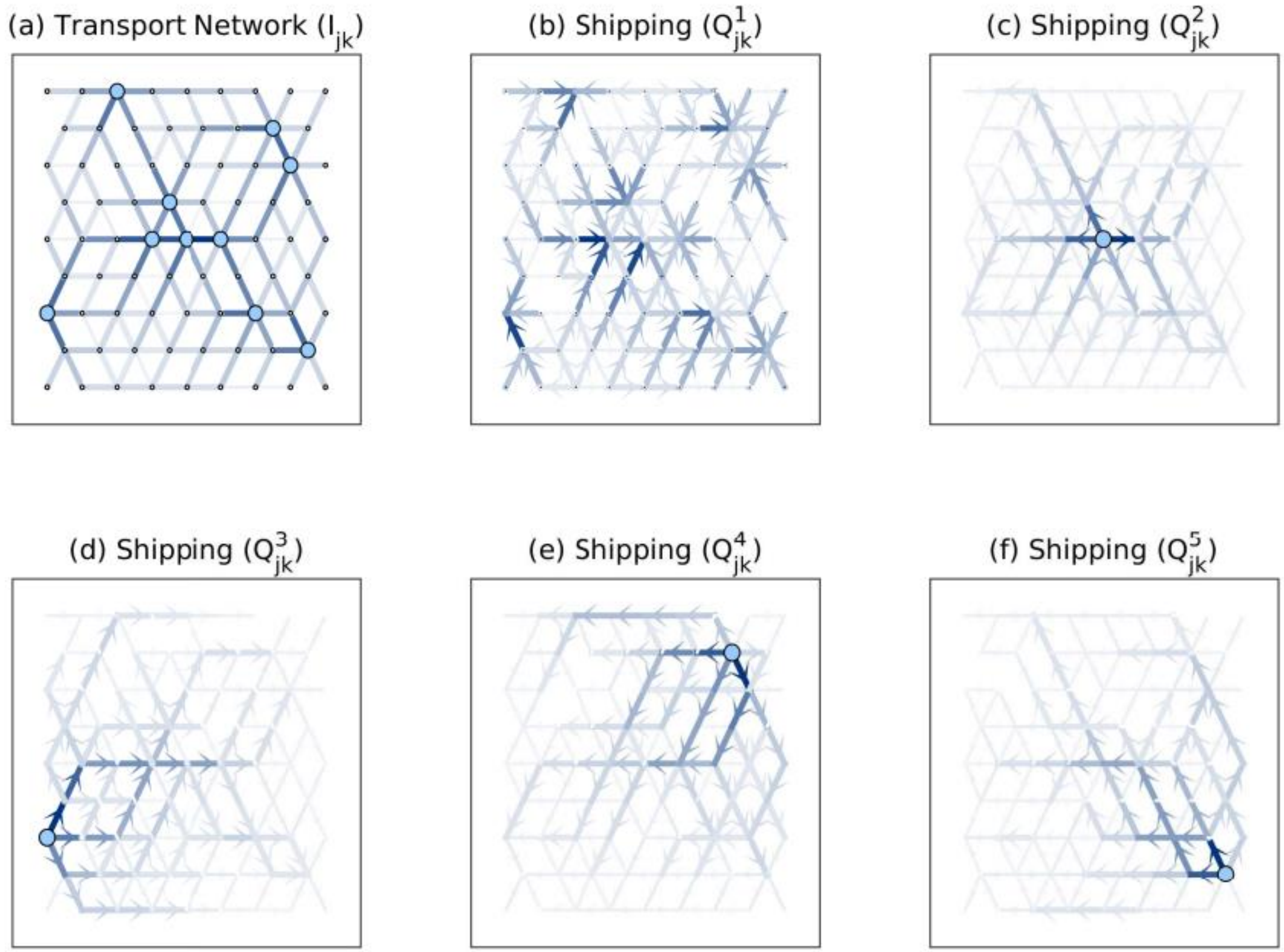
▶I_{jk}の最適解と各財の最適輸送量$Q_{jk}^{n}(n = 1, \ldots, 11)$の計算

設定：$\beta = \gamma = 1\ in\ convex\ case,\ \gamma = 2\ in\ non-convex\ case,$ 労働者は移動，地理的障害なし，10個の工業製品はそれぞれ10都市で生産され，都市のみ生産性パラメータが1，農産品はその他のノードで生産され，各財の代替弾力性は$\sigma = 2$.

4. Illustrative Examples

4.2. Many sectors and Labor Mobility

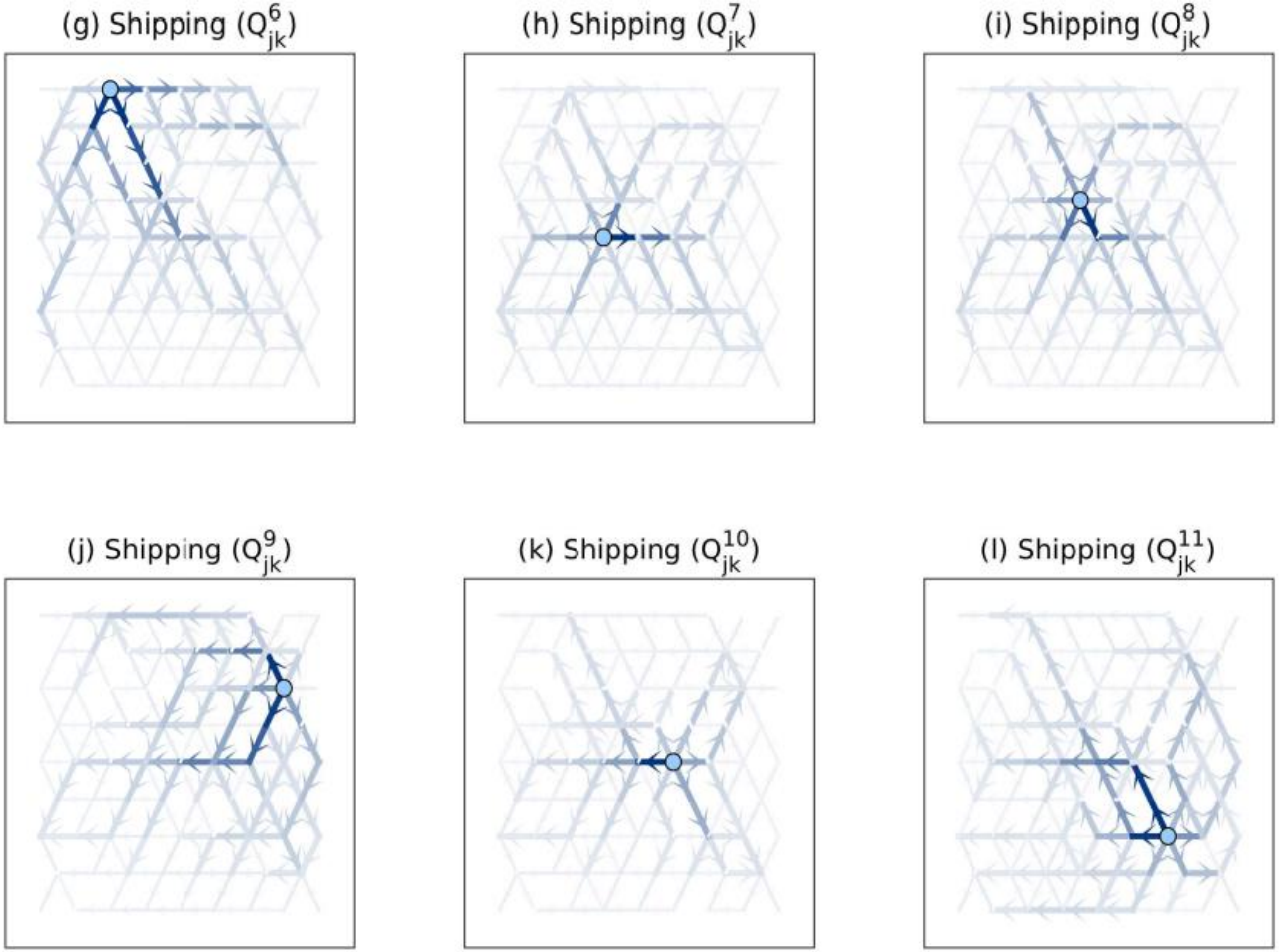
Convex-Case



4. Illustrative Examples

4.2. Many sectors and Labor Mobility

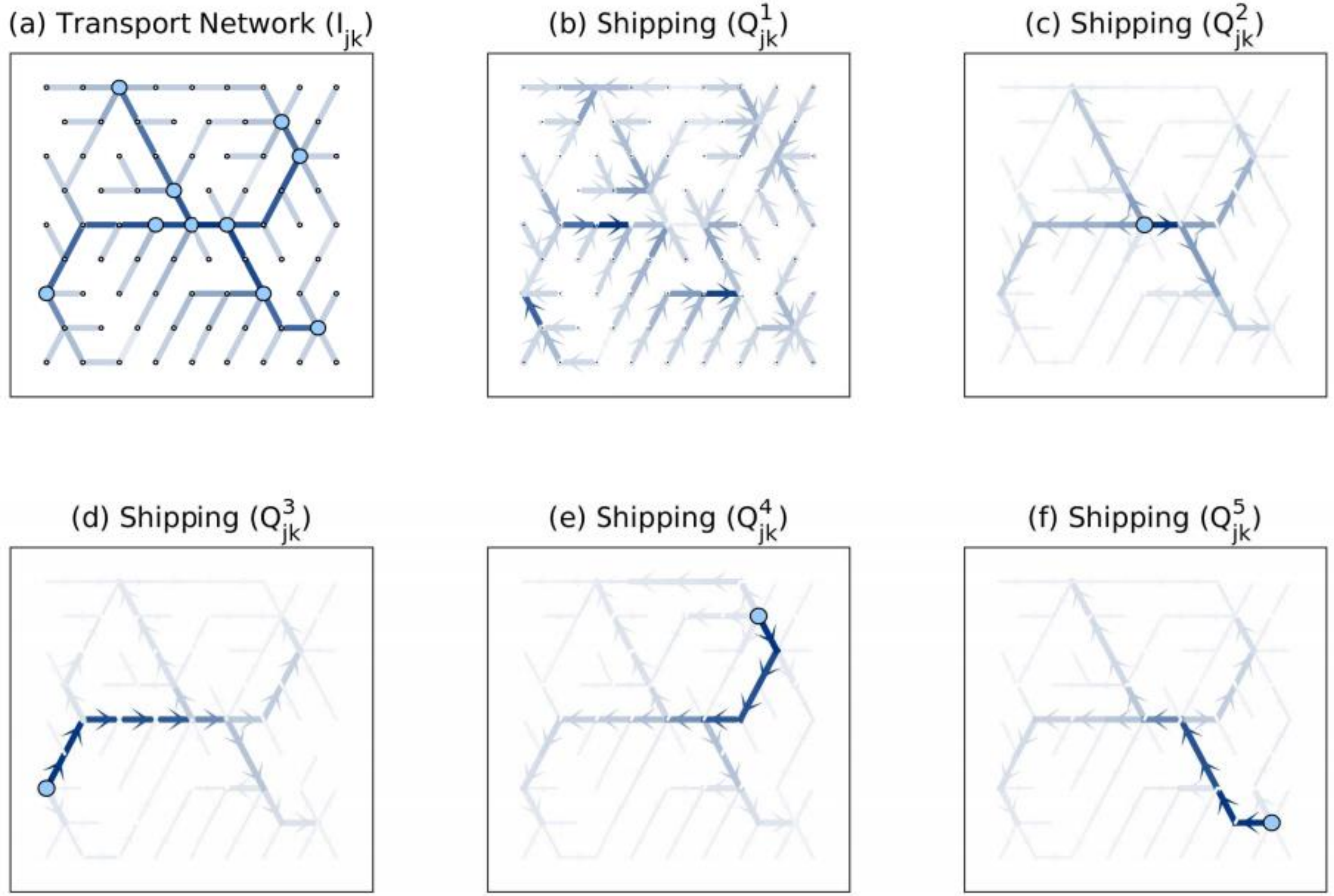
Convex-Case



4. Illustrative Examples

4.2. Many sectors and Labor Mobility

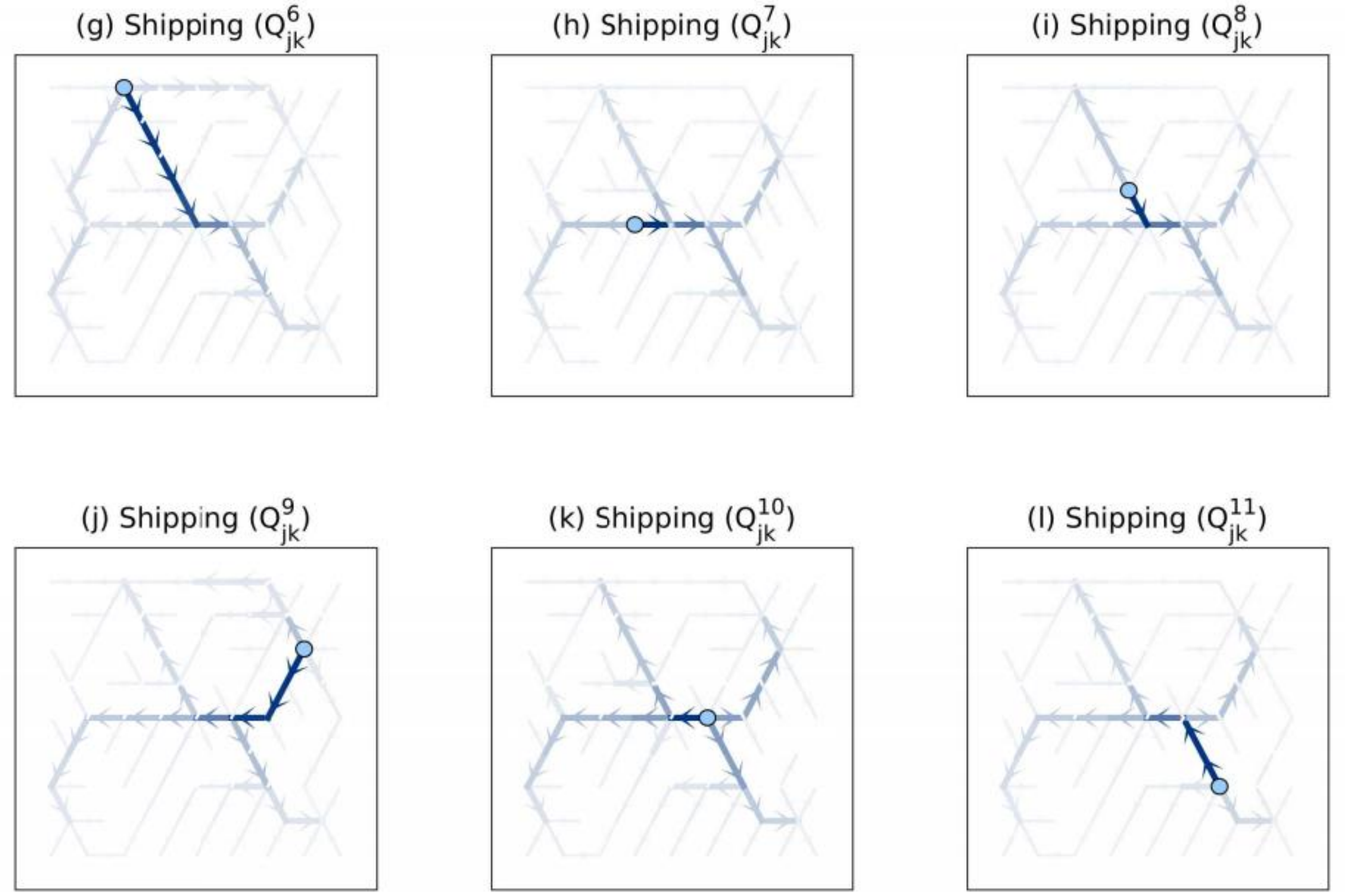
Non-Convex-Case



4. Illustrative Examples

4.2. Many sectors and Labor Mobility

Non-Convex-Case



4. Illustrative Examples

4.3. Geographic Features

▶Preparation

(1) 効用関数はCRRA型：$U = (c^{\alpha} h^{1-\alpha})^{1-\rho} / (1-\rho)\ with\ \alpha = \frac{1}{2}\ and\ \rho = 2$
(2) 財と生産要素は一つ（労働のみ）
(3) 労働やすべての技術は線形
(4) 混雑とインフラ投資のバランスに関しては式(10)を採用

▶地理的障害と交通技術

設定：$\beta = \gamma = 1\ in\ convex\ case,\ \gamma = 2\ in\ non-convex\ case,$労働者は固定（都市のみ$L_j = 1$），**地理的障害あり**，財は20都市で生産され，中心都市のみ生産性パラメータが1，その他の都市では0.1.

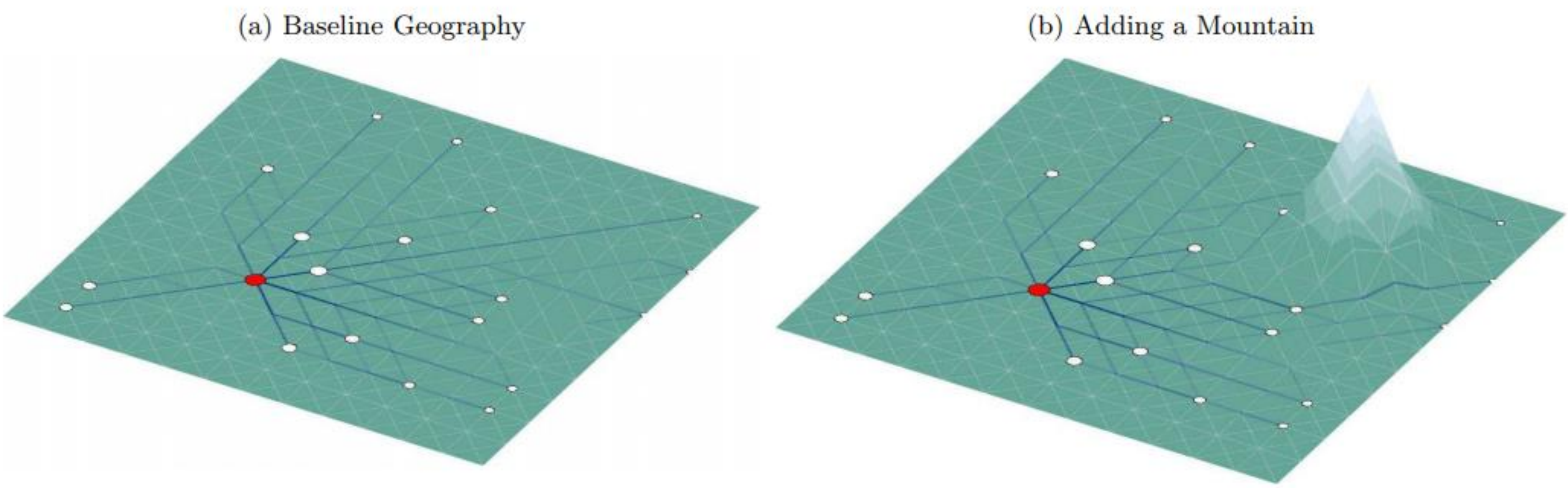
4. Illustrative Examples

4.3. Geographic Features

▶Geographic Friction

(a) $\delta^{I}_{jk} = \delta_0 Distance^{\delta 1}_{jk}$

(b) $\delta^{I}_{jk} = \delta_0 Distance^{\delta 1}_{jk}\left(1 + |\Delta Elavation|_{jk}\right)^{\delta^2}$



4. Illustrative Examples

4.3. Geographic Features

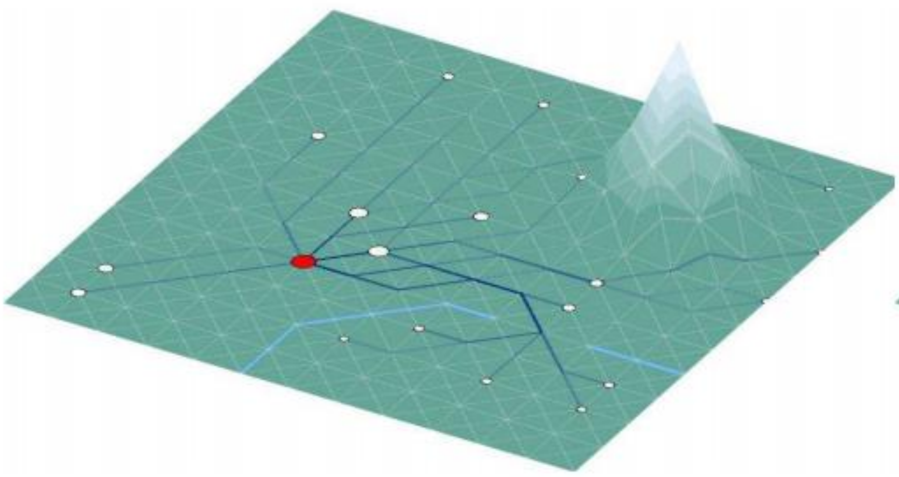
▶Geographic Friction & New Transportation technology

$$\delta_{jk}^{I} = \delta_0 Distance_{jk}^{\delta 1}\left(1 + |\Delta Elavation|_{jk}\right)^{\delta^2} \delta_3^{CrossingRiver_{jk}} \delta_4^{AlongRiver_{jk}}$$

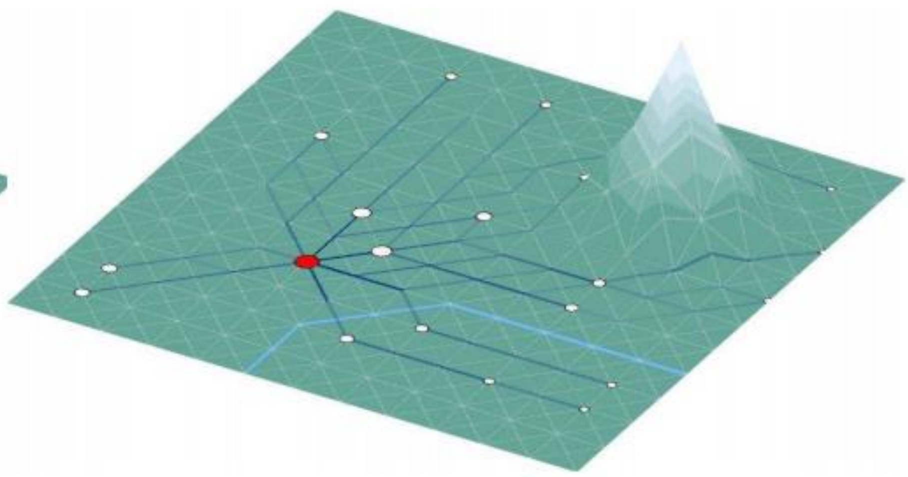
(c) $\delta_3 = \delta_4 = \infty$

(d) $1 < \delta_3 < \infty$ （橋の建設が可能）

(c) Adding a River and a Bottleneck Access by Land



(d) Allowing for Endogenous Bridges



4. Illustrative Examples

4.3. Geographic Features

▶Geographic Friction & New Transportation technology

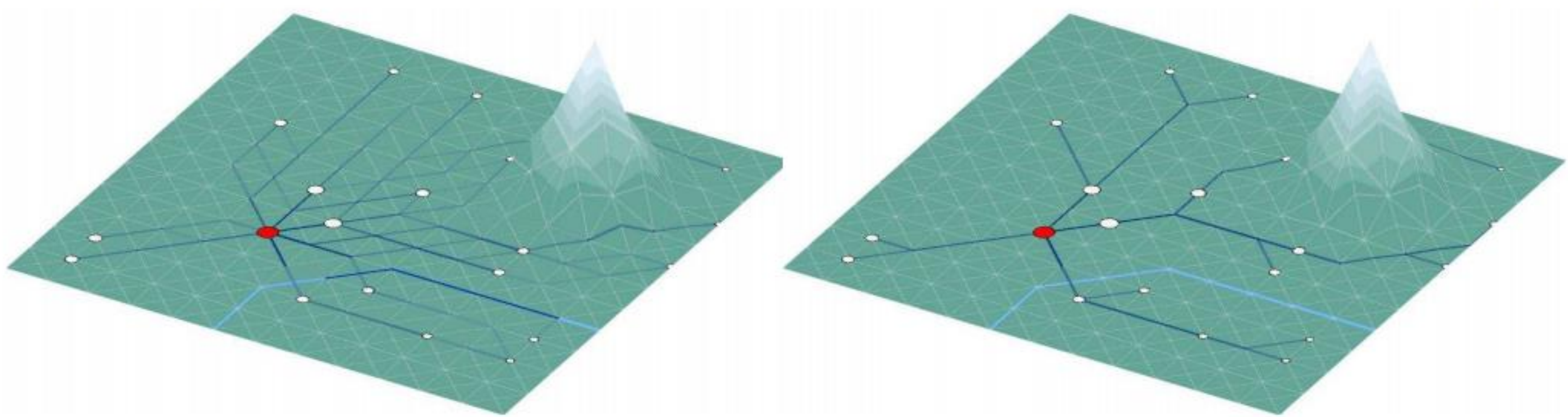
$$\delta_{jk}^{I} = \delta_0 Distance_{jk}^{\delta 1}\left(1 + |\Delta Elavation|_{jk}\right)^{\delta^2} \delta_3^{CrossingRiver_{jk}} \delta_4^{AlongRiver_{jk}}$$

(e) $1 < \delta_3 < \infty$, $\delta_4 < \infty$（橋の建設，河川水運が可能）

(f)$1 < \delta_3 < \infty$, $\delta_4 < \infty$, $\gamma = 2; \beta = 1$ (Non-Convex Case)

(e) Allowing for Water Transport

(f) Non-Convex Case ($\gamma = 2$; $\beta = 1$) with Annealing



5.1. Observed Data and Underlying Graph

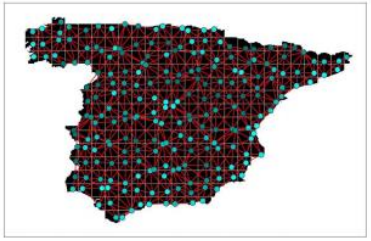
▶Application to 25 European Countries

ここまで議論してきたフレームワークを，25のヨーロッパの国々の道路ネットワークの効率性についての定量的分析に適用する．

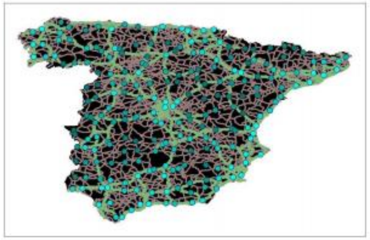
▶Construct the graph $(\Im, \mathcal{E})$

▷ $\Im$：0.5度四方（約50km）セルの人口
▷ $\mathcal{E}$：隣接するセルをつなぐリンク（ノードあたり最大8個のノードと接続）
▷ I_{jk}^{obs}：jk間をつなぐ道路のインフラレベル

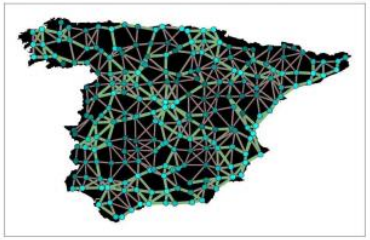
▶Example : Spain



(a) Underlying Graph



(b) Actual Road Network



(c) Measured Infrastructure I_{jk}^{obs}

5. Application

5.2. Parametrization

▶Production technologies: $Y_j^n = z_j^n L_j^n$

▶Transport technologies: $\tau_{jk}^n = \delta_{jk}^T \frac{\left(Q_{jk}^n\right)^\beta}{I_{jk}^\gamma}$

▷地理的障害パラメータ$\delta_{jk}^T = \delta_0^T Distance_{jk}$, δ_0^Tは既往研究より0.39に設定

▷混雑効果パラメータβも既往研究より1.24に設定

▷インフラ投資効果は$\gamma \in \{0.5\beta, \beta, 1.5\beta\}$の3段階

▶Preferences: $U(c,h) = c^\alpha h^{1-\alpha}$

▷財の数は$N = 10$に設定　（$N-1$個の工業製品と1個の農産品）

▷総消費は，$C_j = \left(\sum_{n=1}^N \left(C_j^n\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$　$\sigma = 5$と設定.

5. Application

5.2. Parametrization (Cont'd)

▶Fundamentals: $\{z_j, H_j\}$について

▷L_j^{obs}, GDP_j^{obs}をI_j^{obs}がgivenのもとでの最適配置問題の解であると考え，
L_j^{obs}, GDP_j^{obs}からz_jを計算し，H_jは1に固定する．

▶Building Costs: δ_{jk}^{I}について

▷ $\delta_{jk}^{I} = \delta_{kj}^{I}$と設定
▷ 2 つの設定を考える：$\delta_{jk}^{FOC}, \delta_{jk}^{GEO}$

▷ δ_{jk}^{FOC}：$\underline{I_{jk}} = 0$のもとで，$I_{jk}^{*} = \left[\frac{\gamma}{\mu}\frac{\delta_{jk}^{T}}{\delta_{jk}^{I}}\left(\sum_n P_j^n \left(Q_{jk}^n\right)^{1+\beta}\right)\right]^{\frac{1}{1+\gamma}}$を解いて
建設されたのがI_{jk}^{obs}と想定し，δ_{jk}^{I}を計算
▷ δ_{jk}^{GEO}：ユークリッド距離や道路の高低差を考慮して別に設定．

5. Application

5.3. Optimal Expansion and Reallocation

2 つの反事実的 (Counterfactual) アプローチ

▶ Optimal Expansion

▷Kを各国で**50%**増加させる
▷ $\underline{I_{jk}} = I_{jk}^{obs}$のもとで，最適な$I_{jk}^{*}$を選ぶ
▷ Building Costsはδ_{jk}^{FOC}, δ_{jk}^{GEO}両方を使用

▶ Optimal Reallocation

▷ Kは現状と同じ
▷ $\underline{I_{jk}} = 0$のもとで，最適なI_{jk}^{*}を選ぶ
▷ Building Costsはδ_{jk}^{GEO}のみ使用

5. Application

5.3. Optimal Expansion and Reallocation

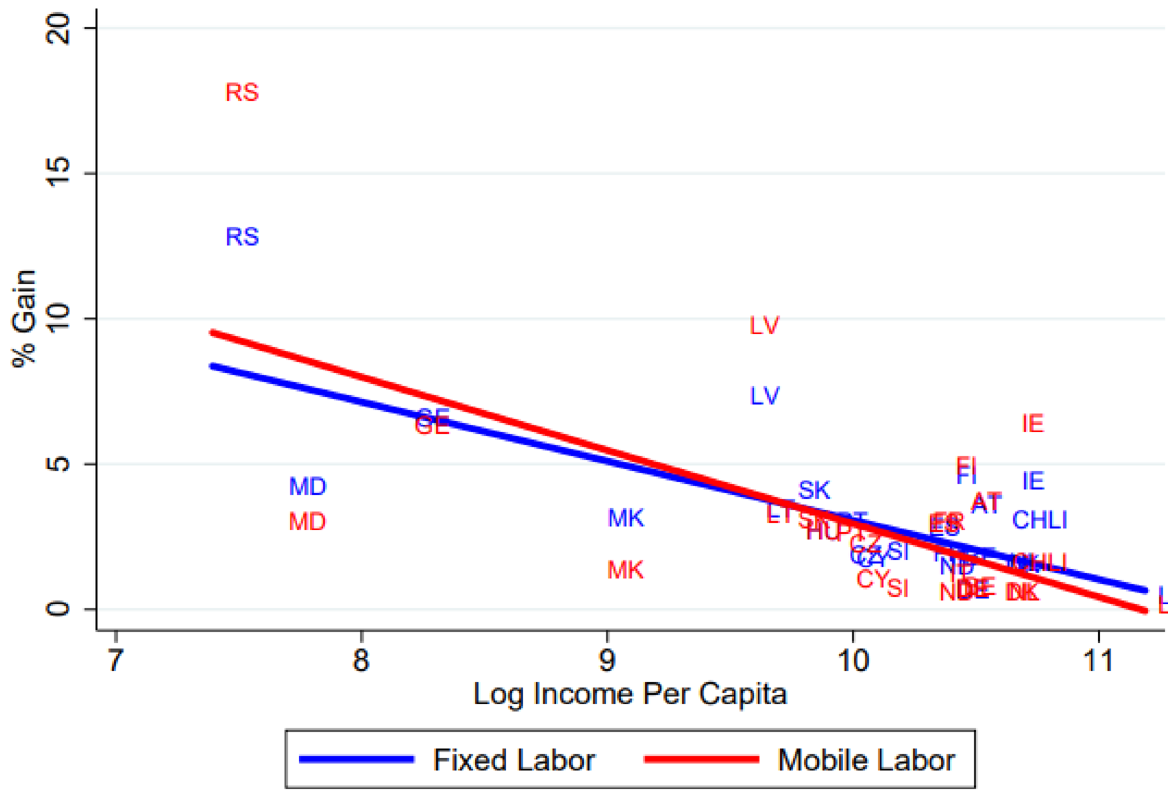
▶社会的厚生の変化（25カ国平均）

Returns to Scale:	$\gamma = 0.5\beta$		$\gamma = \beta$		$\gamma = 1.5\beta$	
Labor:	Fixed	Mobile	Fixed	Mobile	Fixed	Mobile
Optimal Reallocation						
$\delta = \delta^{I,GEO}$	3.2%	3.0%	4.6%	4.8%	5.6%	6.6%
Optimal Expansion						
$\delta = \delta^{I,GEO}$	3.9%	3.5%	5.8%	5.7%	7.2%	7.9%
$\delta = \delta^{I,FOC}$	1.2%	1.0%	3.4%	5.8%	11.3%	12.4%

5. Application

5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶インフラ再配置による社会的厚生の変化（国別）



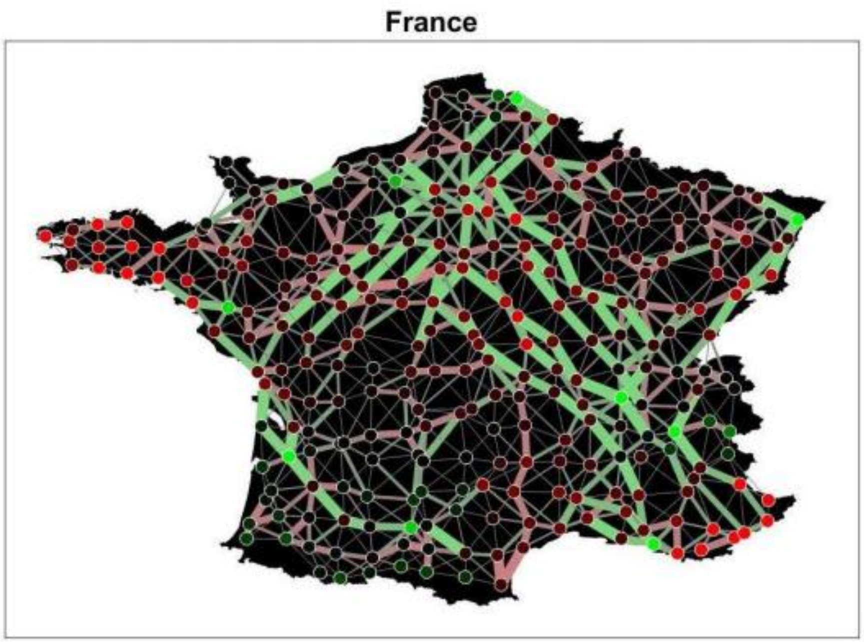
Linear regression slope (robust SE): Mobile Labor: -2.523 (1.269); Fixed Labor: -2.035 (.712)

5. Application

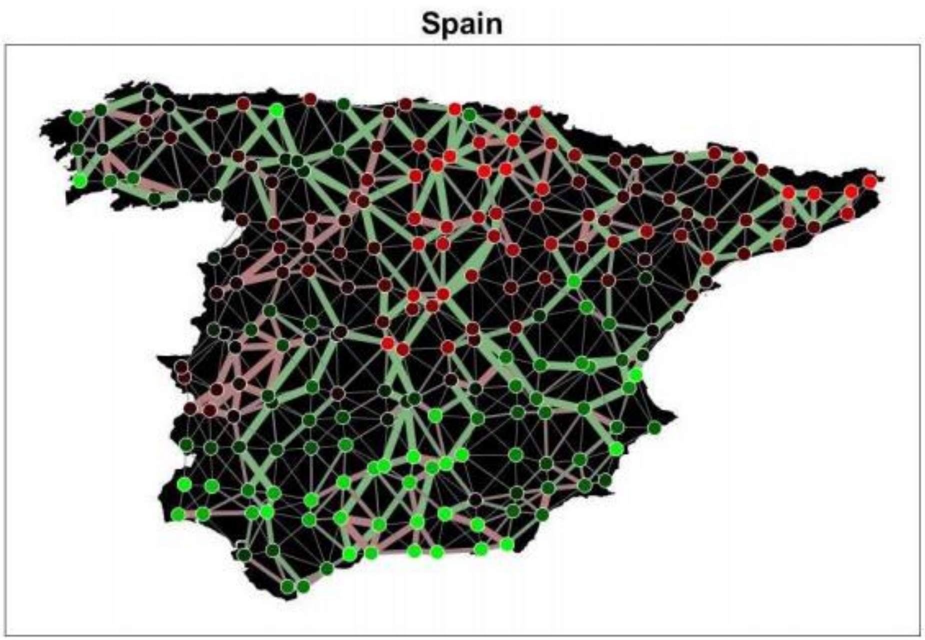
5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶Example: Optimal Reallocation(France & Spain)

(a) Optimal Network Reallocation, $\gamma = \beta$



(b) Optimal Network Reallocation, $\gamma = \beta$



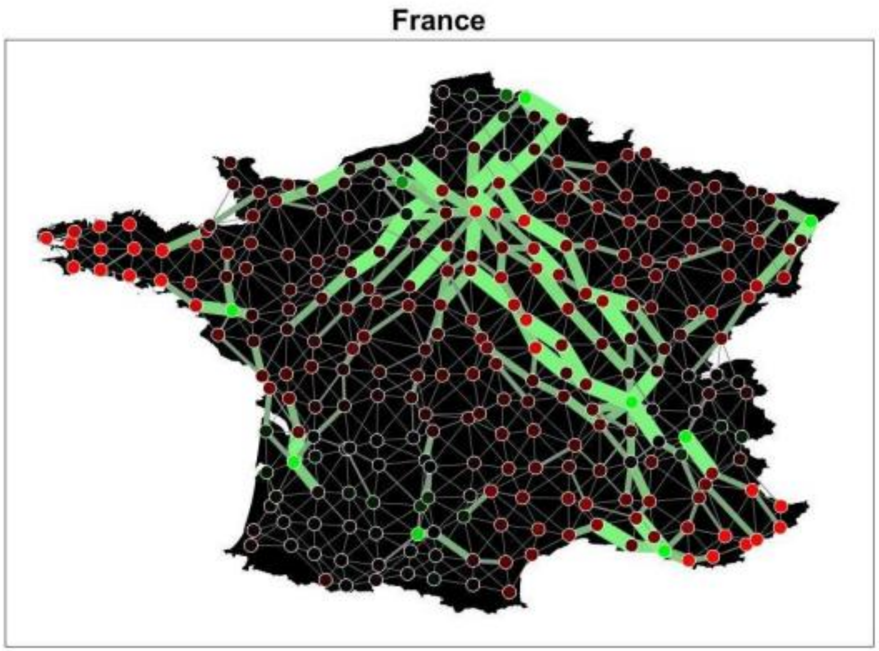
※緑の（赤の）ノードでは人口が増加（減少）し，緑のネットワークでは正の投資が，赤のネットワークでは負の投資（現状より縮小）が見られる．

5. Application

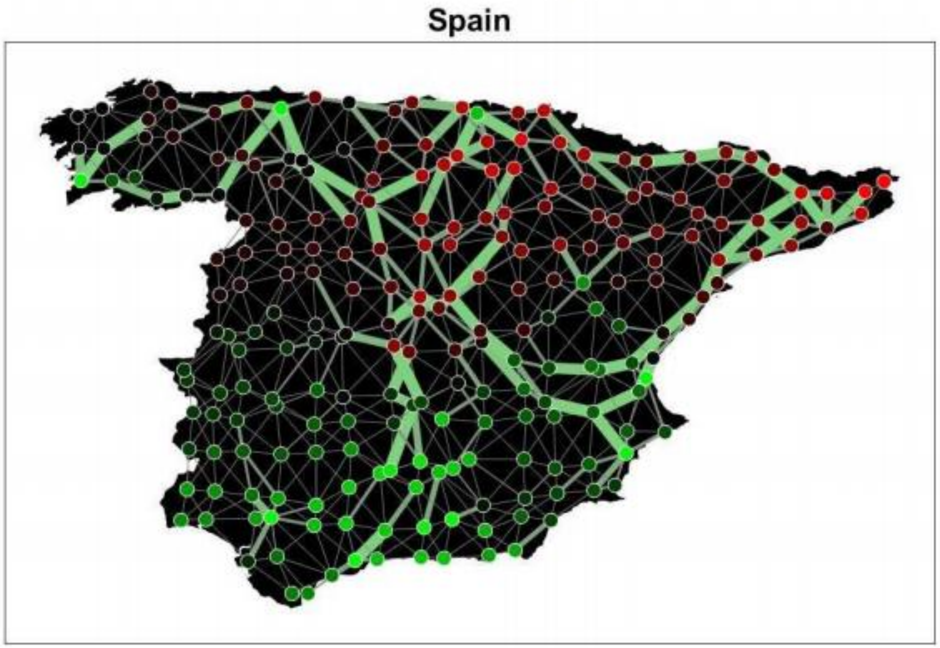
5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶Example: Optimal Expansion (France & Spain)

(c) Optimal Network Expansion, $\gamma = \beta$



(d) Optimal Network Expansion, $\gamma = \beta$

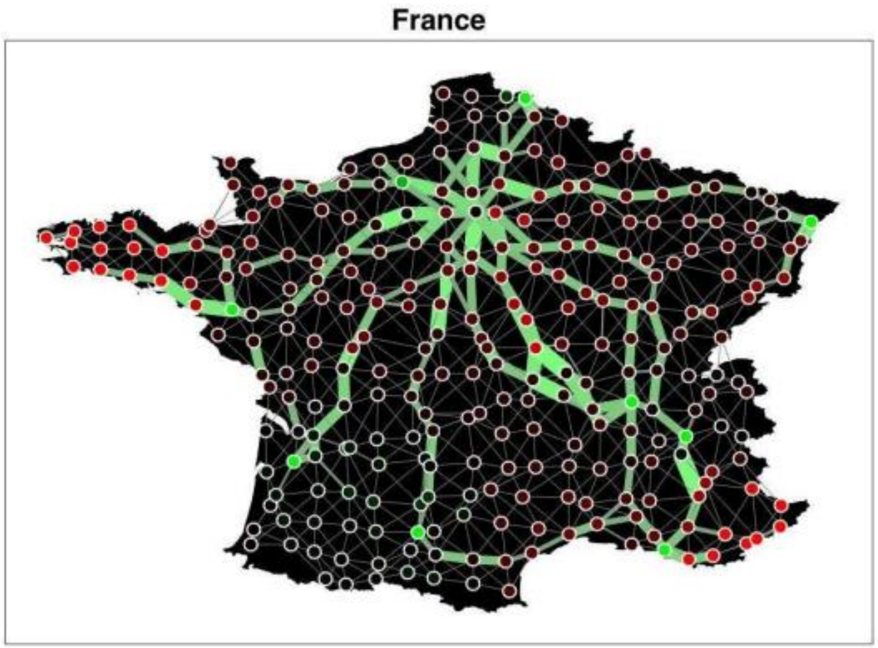


5. Application

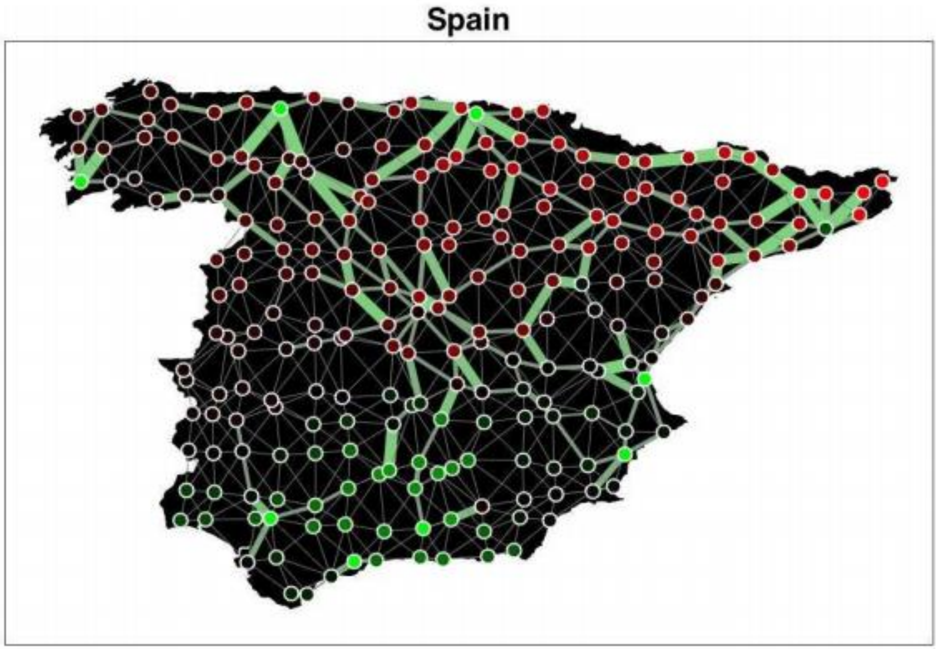
5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶Example: Optimal Expansion (France & Spain, Non-Convex Case)

(e) Optimal Network Expansion, $\gamma > \beta$



(f) Optimal Network Expansion, $\gamma > \beta$



5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶どこにインフラが配置されるか？

被説明変数：$\Delta \ln \overline{I_j}$

	Reallocation	Expansion ($\delta = \delta^{I,GEO}$)	Expansion ($\delta = \delta^{I,FOC}$)
Population	0.308***	0.104***	0.004
Income per Capita	0.127	0.007	-0.020
Consumption per Capita	0.290**	0.179***	0.130
Infrastructure	-0.362***	-0.195***	-0.067**
Differentiated Producer	0.271***	0.133***	-0.099***
R^2	0.38	0.32	0.38

***=1% significance, **=5%, *=10%.

5. Application

5.3. Optimal Expansion and Reallocation

▶どの地域が成長するか？

被説明変数：$\Delta \ln L_j$

	Reallocation	Expansion ($\delta = \delta^{I,GEO}$)	Expansion ($\delta = \delta^{I,FOC}$)
Population	-0.002	-0.001	0.002**
Income per Capita	0.001	-0.002	0.030**
Consumption per Capita	**-0.147*** **	**-0.139*** **	**-0.179*** **
Infrastructure	0.002	0.005***	0.000
Infrastructure Growth	0.013*	0.032**	0.003**
Differentiated Producer	0.013**	0.023***	0.031***
R^2	0.57	0.67	0.90

***=1% significance, **=5%, *=10%.

6. Conclusion

▶最適な交通ネットワークを明らかにするためのフレームワークの構築

1) （労働移動を許容した）新古典派経済学の空間的展開
2) 混雑を考慮した最適輸送問題
3) 最適ネットワーク建設問題

▶ヨーロッパの実ネットワークへの適用

▷Optimal Expansionによる社会的厚生の増大を確認
▷貧困国におけるmisallocationによる社会的厚生の損失を確認

▶今後の課題

▷集積効果の導入
▷動学化

***=1% significance, **=5%, *=10%.